॥ हिन्दी बीजगणित ॥

पहिला भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय जिलों की पाठशालाओं के विद्या-
र्थियों के लिये पण्डित मोहनलाल ने अंग्रेजी से
हिन्दी भाषा में तर्जुमा किया

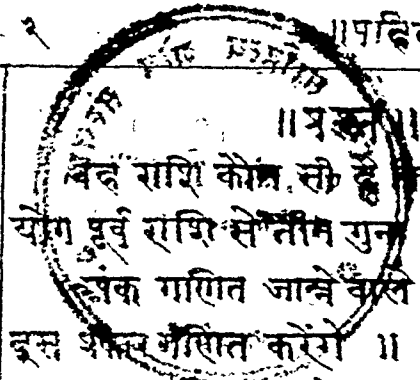
अवध देश के डैरेक्टर आफ़ पबलिक इन्स्ट्रक्शन
श्रीयुत विलियम हैण्डफ़ोर्ड साहिब बहादुर
के हुक्म से

स्थान लखनऊ
मतबअ मुन्शी नवलकिशोर में छापा गया
सन १८६५ ई॰

॥ हिन्दी बीज गणित के प्रथम भाग का ॥
सूची पत्र

॥ हिन्दी बीज गणित ॥

॥ पहिला भाग ॥

जैसे अंक गणित में संख्याओं के स्थान में १, २, ३, ४, आदि अंक लिखते हैं वैसे ही बीज गणित में संख्याओं के स्थान में अक्षर लिखते हैं इस गणित को बीज गणित-इस लिये कहते हैं कि इस्से गणित का मूल मालूम हो जाता है और बीज शब्द का अर्थ मूल है और जैसे पानी-की भाफ से केवल लोहे की बड़ी भारी नाव हज़ारों मन माल लाद के गंगा में पवन की नाईं बड़ी चली जाती है और दूसरी देशी नाव जिसको हाथ से खींचते हैं उसमें इस की नाव की अपेक्षा माल भी बहुत कम लदता है और रेंगती सी जाती है ऐसे ही बीज गणित से बड़े २ कठिन प्रश्न सहज में हो जाते हैं और बहुतेरे प्रश्न ऐसे हैं जो केवल बीज गणित ही से होते हैं अंक गणित से नाम को भी नहीं होते इस बात को सुगम उदाहरण से दिखाते हैं ॥

॥प्रश्न॥

वह राशि कौन सी है कि जिसमें १० जोड़ दें तो योग पूर्व राशि से तीन गुना हो जाय ॥

अंक गणित जान्ने वाले दो इष्ट राशि की रीति से इस प्रश्न गणित करेंगे ॥

प्रथम कल्पना करो कि २० राशि है तो २० में १० जोड़ने से ३० हुए और तीन गुने २० हैं ६० इसलिये ६० और ३० में ३० का अन्तर रहा दूसरे कल्पना करो कि १० पूर्व राशि है तो १० में १० जोड़ने से २० हुए और तीन गुने १० हैं ३० इसलिये १० का अन्तर रहा फिर इष्ट राशि की रीति से तीस गुने १० वा ३०० में से दस गुने २० वा २०० घटाये तो शेष १० रहे और इस शेष में दोनों अन्तरों के अन्तर का वा २० का भाग देने से ५ पूर्व राशि मिली ॥

बीज के जान्नेवाले इस प्रश्न को इस रीति से करेंगे कल्पना करो कि (य) पूर्व राशि है तो प्रश्न के अनुसार

$$य+१०=३य$$

इसलिये २य=१० और य=५ पूर्व राशि हुई

बीज के पढ़ने वालों को चाहिये कि दोनों की रीति से जो उत्तर निकला है उनमें देखें कौन सी रीति छोटी और सुगम है बहुतेरे प्रश्न ऐसे हैं कि उनके उत्तर केवल बीज गणित से ही निकलते हैं और अंक गणित से वे किसी रीति पर नहीं निकल सकते हैं इस बात की सत्यता दिखाने के लिये जो यहां कोई उदाहरण लिखते तो वह कुछ भी समझ में न आता। आगे बीज के पढ़ने से यह बात मालूम होगी

॥ परिभाषा ॥

राशि शब्द का अर्थ समूह वा ढेर है और इससे हर एक वस्तु का परिमाण जाना जाता है कि वह तोल आदि में कितनी है वा गिनती में कितनी है इसलिये राशि के समझने के लिये अंक लिखते हैं जैसे मनुष्यों की राशि का परिमाण गिनती से जाना जाता है और कपड़ों का परिमाण गजों की संख्या से जाना जाता है बीज गणित में व्यक्त अर्थात् जानी हुई राशि जैसे २० आदमी २० घोड़े आदि के स्थान में अ, क, ग, आदि अक्षर लिखते हैं और अव्यक्त अर्थात् अनजानी हुई राशि के स्थान में जैसे अब से पूछा जाय कितने गज कपड़ा है वा कितने मन नाज है इस के स्थान में य, र, ल, व, आदि अक्षर लिखते हैं अक्षरों के रखने में गणित सहज से थोड़े में हो जाती है क्योंकि २२४५६ के स्थान में (अ) लिख सकते हैं ॥

जोड़ना घटाना गुणा भाग आदि के चिन्ह लिखते हैं + यह चिन्ह जोड़ने का है इसे धन कहते हैं द्रव्य के इकट्ठे होने को धन कहते हैं इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि में दहनी ओर की राशि जोड़नी है जैसे अ+क, अ धन क पढेंगे इसका यह अर्थ है कि अ राशि में क राशि जोड़नी है और कल्पना करो कि अ राशि ५ के बराबर है और क राशि ७ के बराबर है तो अ+क ५+७ वा १२ के बराबर होगा और जो (ग ४) के बराबर हो तो अ+क+ग को अ धन क धन ग पढेंगे और वह १२+४ वा १६ के तुल्य

होगा ॥

घटाने का चिन्ह – इसे ऋण कहते हैं जब धन को अपने पास से दूसरे को उधार देते हैं उस धन को ऋण बोलते हैं॥

इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि में दाहनी ओर की राशि घटानी है जैसे अ–क इसे अ ऋण क पढ़ते हैं और इसका यह अर्थ है कि अ राशि में से क राशि घटानी है अ के स्थान में १० रक्खो और (क) के स्थान में ६ तो अ–क, १०–६ वा ४ के बराबर होगा और जो (ग), ३ के तुल्य हो तो अ–क–ग इसे अ ऋण क ऋण ग पढ़ेंगे और वह ४–३ वा १ के तुल्य होगा ॥

गुणा करने का चिन्ह × इसे गुणित अर्थात् गुणा गया पढ़ते हैं इसलिये जब यह चिन्ह दो राशि के बीच में हो तो जानो कि बाईं ओर की राशि दाहनी ओर की राशि से गुणी जायगी जैसे अ×क इसे अ गुणित क वा क से गुणा हुआ अ पढ़ेंगे और इसका यह अर्थ है कि (अ) राशि (क) राशि से गुणी गई है जो (अ) को ६ मानो और (क) को ४ तो अ×क ६×४ वा २४ के तुल्य होगा ॥

और जो (ग), २ के तुल्य हो तो अ×क×ग इसे अ गुणित क गुणित ग पढ़ेंगे और यह २४×२ वा ४८ के तुल्य है इसी रीति से ३×य का अर्थ ३ गुणित य है वा तीन य है ॥

× इस चिन्ह के स्थान में बहुधा . ऐसा एक चिन्ह कर देते हैं वा कुछ भी चिन्ह नहीं देते और दो राशि के बीच कोई चिन्ह न होने से यह समझ लेते हैं कि दाहनी राशि बाईं राशि

से गुणी गई है जैसे अ × क, अक और अक इन सब से यही जानो कि क राशि अ बार जोड़ी गई है वा अ राशि से क राशि गुणी गई ऐसे ही ७ य से ७ बार य जानो ॥

अ × क × ग, अ·क·ग अकग इन सब का एक ही अर्थ है और ३ यर से य और र की ३ गुना घात जानो परन्तु जो दो राशि वा एक अंक और राशि के बीच कोई चिन्ह नहीं होता है तो हम उन से दो राशि का घात समझते हैं और पढ़ने में शब्द गुणित को छोड़ देते हैं ॥

जैसे ७ अ क और ३ य को पढ़ने में अ क और ३ य पढ़ते हैं इसलिये ३ × य और ३ × य वा तीन गुना य और ३ धन य को एक ही न समझो परन्तु अंक गणित में जोड़ने का चिन्ह बहुधा नहीं लिखते इसलिये जब दो अंकों के बीच कोई चिन्ह नहीं होता है तो हम उनका योग समझते हैं जैसे २ $\frac{१}{२}$ का अर्थ २ + $\frac{१}{२}$ है और २३ का अर्थ २० + ३ और दो अक्षर वा एक अंक और एक अक्षर के बीच गुणा करने में कोई चिन्ह नहीं रखते परन्तु जब दो अंकों को गुणा करना होता है तो उनके बीच × यह चिन्ह कर देते हैं और यह चिन्ह इसलिये नहीं देते हैं इसके देने से दशांश चिन्ह का भान हो सकता है ॥

३ × क के ४ × ३ तुल्य है

५ × ७ के ७ × ५ तुल्य है

६ × १० के १० × ६

अ × क के क × अ ०००००

अ क के क अ ००००

(६) जिन राशियों के गुणा करने से घात मिलता है उन में से प्रत्येक को घात का गुणक रूप अवयव कहते हैं ॥

जैसे ३५ के ५ और ७ गुणक रूप अवयव हैं क्योंकि ५×७ के ३५ तुल्य है और ३य के ३ और य गुणक रूप अवयव हैं और अक के अ और क गुणक रूप अवयव हैं ॥

ऐसे ही ८×९ वा ७२ में ८ और ९ गुणक रूप अवयव हैं जो राशि दो वा अधिक राशियों के गुणा करने से नहीं बन सकती हो तो उसके गुणक रूप अवयव नहीं होते हैं ॥

जैसे ७, १३, १७ में ७ के १ और ७ ही गुणक रूप अवयव हैं और १३ में १ और १३ और १७ में १ और १७ गुणक रूप अवयव हैं इनके सिवाय और कोई दो अंक गुणक रूप अवयव नहीं हैं अक वा कअ राशि में क का गुण अर्थात् गुणक अ है वा अ का गुणक क है ॥

जैसे साझे में एक मनुष्य को दूसरे मनुष्य का साझी कहते हैं और दूसरे मनुष्य को भी पहिले का साझी कहते हैं ३य में ३ गुणक है क्योंकि य को ३ गुणा करने से घात ३य के तुल्य होता है ॥

और ३यर में यर का ३ गुण है र का ३य गुण है और (३र) का (य) गुण है और २(अकग) में (ग) का २अक गुण है (क) का २अग गुण है अ का २कग गुण है और २अकग का २ गुण है (अ) राशि के १ और अ ही गुणक रूप अवयव हैं इसलिये अ का गुण १ है ॥

गुण से राशि को गुणा करने से यह समझो कि गुण की जितनी संख्या होगी उतनी बार राशि जोड़ी गई है जैसे ३यर का अर्थ है कि ३ बार यर वा ३य बार र अर्थात र का गुण ३य है वा ३र वा रय इसमें य का गुण ३र है और केवल (अ) से जानो कि अ राशि एक गुनी है इस कारण उसका १ गुण

है गुणने में ३य बार वा २ अक बार कहना ठीक है क्योंकि हर एक अक्षर का अर्थ एक राशि या संख्या है जैसे ३य र नें जो य के स्थान में १० रक्खें तो ३य ३० के तुल्य होगा और ३य बार र ३० र के तुल्य होगा ॥

भाग देने का चिन्ह ÷ इसको भाजित वा भाग दिया गया पढ़ते हैं और जिन दो राशियों के बीच वह चिन्ह होता है तो जानो कि बांई ओर की राशि में दाहिनी ओर की राशि का भाग लगा है जैसे अ ÷ क इसे अ भाजित क वा अ में क का भाग पढ़ेंगे ॥

और ८ ÷ ४, २ के तुल्य है परन्तु बहुधा इस ÷ चिन्ह को नहीं लिखते क्योंकि $\frac{अ}{क}$ भिन्न का यही अर्थ है जो अ ÷ क का है ऐसे ही $\frac{८}{४}$, ८ ÷ ४ के तुल्य है क्योंकि दोनों २ के तुल्य हैं॥

जो (८) परिभाषा ऊपर लिखी हैं उन के अभ्यास के लिये उदाहरण लिखते हैं। जो अ १० के तुल्य हो, क, ३ के और य ७ के तो बतलाओ कि नीचे जो राशि लिखी हैं वे कौन से अंकों के तुल्य होंगी ॥

॥ १ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) अ + क + य

(२) अ + क − य

(३) अ − क + य

(४) अ − क − य

(५) २अ − य

(६) ४अ + ३क − २य

(७) ७अ + २क − २य

(८) ५अ − ४क − ४य

(९) २अक + ३य

(१०) २अ + ५ − ३कय + १०

(११) ७अक − अकय

(१२) ३अ + कय − यय

(१३) ३अय में य का गुण क्या है ॥

(१४) ६अकय में य का गुण क्या है ॥

(१५) ६अकय में कय का गुण क्या है

(१६) २अ, २अक, अकअ, ३अकय, मअ, मयय, यअय, और (अकयर) प्रत्येक राशि के अ का गुण क्या है॥

(१७) २५ का ऐसा गुणक क्या है कि जो उस्से २५ को गुण दें तो घात १२५ हो जाय

(१८) ३+य और ३य में क्या अंतर है और कल्पना करो कि य ७ के तुल्य है

(१९) ३अ+य और ३अ−य में क्या अंतर है जब कि अ १० के और य ६ के तुल्य है॥

(२०) ३अ+य और ३अय में क्या अंतर है जब कि अ ३ के तुल्य और य २ के तुल्य है॥

जब कि अ १० के तुल्य है और क ३ के तुल्य और ७ के तो बताओ कि

(२१) ३अय ÷ ७ किसके तुल्य है॥

(२२) ३अय ÷ ७क किसके तुल्य है॥

(२३) $\frac{२अ+य}{क}$ किसके तुल्य है॥

(२४) $\frac{२क+३य}{अ}$ किसके तुल्य है॥

(२५) $\frac{अ-प}{क}$ किसके तुल्य है॥

(२६) $\frac{३अ}{क} + २य - \frac{अकय}{२१अ}$ किसके तुल्य है॥

(२७) $\frac{५अय}{क} - \frac{२क+अ}{२य-३क}$ किसके तुल्य है॥

(२८) $\frac{३य}{४अ+३} + \frac{४कय}{१०अ-२६}$ किसके तुल्य है॥

(२९) $\frac{२अ+४क}{३य-अ-क} - \frac{अ-२क}{य-क}$ किसके तुल्य है॥

(३०) $\frac{मअ}{क+य} + \frac{नक}{अ-प} - \frac{पय}{अ-क}$ किसके तुल्य है॥

जो एक राशि को उसी राशि से कई बार गुणा करो तो इसे घात क्रिया कहते हैं इसके नीचे उदाहरण लिखते हैं॥

अ×अ को $अ^2$ यों लिखते हैं और उसे (अ) का वर्ग वा अवर्ग वा अ का दूसरा घात कहते हैं॥

अ×अ×अ को $अ^3$ यों लिखते हैं॥

और उसे अ का घन वा अ घन वा अ का तीसरा घात कहते हैं॥

अ×अ×अ×अ को $अ^4$ यों लिखते हैं॥

और उसे अ के वर्ग का वर्ग वा अवर्गवर्ग वा अ का चौथा घात कहते हैं परन्तु याद रखो कि, अ और $अ^1$ का अर्थ एक ही है

और अ और $अ^0$ में अंतर है आगे पढ़ने से जानोगे कि $अ^0$ = १ के तुल्य है राशियों के ऊपर दाहनी ओर जो १ २ ३ ४ आदि अंक लिखे जाते हैं उन्हें घात मापक कहते हैं क्योंकि उन से राशियों के घात का प्रमाण जान पड़ता है॥

अ+अ को २अ यों लिखते हैं अ×अ को $अ^2$ लिखते हैं॥

जो अ = ४ के तुल्य हो तो २अ = ८ के तुल्य होगा॥

और $अ^2$ = १६ के तुल्य और यह भी याद रखो कि २$अ^2$ का अर्थ अवर्ग दूना है और न कि २अ का वर्ग॥

१० घात क्रिया से उलटी मूल क्रिया होती है इस्से वह मूल राशि निकल आती है जिस में घात क्रिया हुई हो। जैसे एक राशि का वर्गमूल उस राशि को कहते हैं जिस का वर्ग इष्ट राशि के तुल्य हो ऐसे ही किसी एक राशि का घन मूल उस राशि को कहते हैं जिसका घन इष्ट राशि के तुल्य हो॥

९ का वर्गमूल ३ है क्योंकि ३ का वर्ग वा ३×३ = ९ के तुल्य है २७ का ३ घनमूल है उसका घन वा ३×३×३ = २७ के तु

ल्य है ऐसे ही $अ^2$ का वर्गमूल (अ) है क्योंकि अ×अ, $अ^2$ के तुल्य है $अ^3$ का घनमूल (अ) है क्योंकि अ×अ×अ, $अ^3$ के तुल्य है वर्ग मूल का चिन्ह $\sqrt[2]{\ }$ वा केवल $\sqrt{\ }$ है घनमूल का चिन्ह $\sqrt[3]{\ }$ है ॥

बहुधा वर्गमूल का चिन्ह यह $\sqrt{\ }$ लिखा जाता है परन्तु $\sqrt[2]{\ }$ यह चिन्ह ठीक है जैसे जब $\sqrt{अ}$ लिखा है तो अ का वर्गमूल जानो ॥

जिस रीति से अ+अ को २अ लिखते हैं उसी तरह $\sqrt{अ}+\sqrt{अ}$ इसे अ का वर्गमूल दूना जानो ॥

इसे $२\sqrt{अ}$ यों लिखते हैं और २ गुणा अ का वर्ग मूल पढ़ते हैं $\sqrt{अक}$ इस का अर्थ (अ) गुना (क) का वर्गमूल है

$\sqrt{अ+क}$ इसका अर्थ अ धन क वा अ और क के योग का वर्गमूल और जिस राशि का मूल निकालना हो उस संपूर्ण राशि के ऊपर मूल के चिन्ह $\sqrt{\ }$ के ऊपर का भाग बढ़ाकर खींच दो जो अ के स्थान में १६ लिखें और क के स्थान में ९ तो $\sqrt{अ+क}$, $\sqrt{२५}$ वा ५ के तुल्य होगा और $\sqrt{अक}$ $\sqrt{१४४}$ वा १२ के तुल्य होगा $\sqrt{\frac{अ}{क}}$ इसका अर्थ भिन्न $\frac{अ}{क}$ का वर्गमूल है ॥

परन्तु $\frac{\sqrt{अ}}{क}$ इसका अर्थ यह है कि अ के वर्ग मूल में क का भाग लगा ॥

॥ २ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) $अ^2+क^2-ग^2$

(२) $१३अ^2+३क^2-४ग^2$

(३) $५अकग-२२क^2+३ग^3$

(४) $अ^2क+क^2ग$

(५) $१२अ^2क+२०अक-२कग^2$

(६) $\frac{क^2}{अ}+\frac{अ^2}{क}\ \frac{ग^2}{२अ}$

(७) $\frac{८अक^२}{३ग} - \frac{९अक^२}{२कग}$ (८) $मअ^२ + नक^२ - पग^२$

(९) $२\sqrt{क} - \sqrt{२ग}$ (१०) $\sqrt{अक^२} - \sqrt{अक}$

(११) $अ + \sqrt{अ} - \sqrt{अक} + २\sqrt{२कग}$

(१२) $\sqrt{२ग+क} - \sqrt{२क-२अ}$ (१३) $म\sqrt{\frac{क}{अ}} + न\sqrt{\frac{कग}{२}} - प\sqrt{२अग}$

(१४) $\sqrt[३]{अग} + \sqrt{४क} - २\sqrt[३]{ग}$

(१५) $\sqrt{क+ग-अ} - \sqrt[३]{३कग}$

(१६) $\sqrt[३]{अ} + \sqrt{२ग} + \sqrt[३]{\frac{कग}{८}} - ४\sqrt[३]{क-अ}$

(१७) जो अ २ के तुल्य हो तो २अ और $अ^३$ में क्या अन्तर होगा ॥

(१८) जो य, १०० के तुल्य हो तो $२\sqrt{य}$ और $२\times\sqrt{य}$ में क्या अन्तर होगा ॥

(१९) जो य, ६४ के तुल्य हो तो $\sqrt[३]{य}$ औ $\sqrt[३]{य}$ में क्या अन्तर होगा ॥

(२०) जो अ, २ के तुल्य हो औ क ८ के तुल्य तो $\sqrt{अ+क}$ और $\sqrt{अ}+क$ में क्या अन्तर क्या होगा ॥

(२१) जो अ, १६ के तुल्य हो और क, ४ के तुल्य तो $\sqrt{\frac{अ}{क}}$ और $\frac{\sqrt{अ}}{क}$ में क्या अन्तर होगा ॥

११ = इस अंक को तुल्य है पढ़ते हैं ॥

जैसे २ + ४ = ६ अ + य = क इसे अ धन य तुल्य है क के यों पढ़ते हैं और इसका अर्थ यह है कि अ और य का योग क के तुल्य है

$८ \div ४ = २$ और $\sqrt{२५} = ५$

< इस चिन्ह को छोटा है पढ़ते है॥

जैसे अ<क इस का अर्थ यह है कि अ, क से छोटा है॥

∴ इस चिन्ह को इसलिये पढ़ते हैं॥

∵ इस चिन्ह को क्योंकि पढ़ते हैं॥

१२ जब कि एक राशि के कई खंड हों और उनके दाहिनी ओर धन ऋण चिन्ह लगे हों तो हर एक खण्ड को पद कहते हैं और राशि के जितने खंड हों उतने ही पद की राशि कहावेगी। जैसे अ राशि एक पद की है ऐसे ही २अ, अक, ३क, अकग, ये एक पद की राशि हैं और अ+क दो पद की राशि है॥

(१३) किसी एक पद की राशि के बाईं ओर धन चिन्ह हो उसे धन राशि कहते हैं॥

और जो किसी एक पद की राशि के बाईं ओर ऋण चिन्ह हो उसे ऋण राशि कहते हैं॥

क्योंकि ०+(अ) वा +(अ) वा अ एक ही अर्थ इसलिये जो एक पद की राशि के बाईं ओर + वा − का चिन्ह न हो तो उसे धन राशि कहते हैं॥

जो एक राशि कई पदों की हो और उसके धन पदों का योग ऋण पदों के योग से अधिक हो वा कम हो तो संपूर्ण राशि भी धन होगी वा ऋण॥

जैसे कोई ब्योपारी देखा चाहता है कि मेरे पास कितना धन है तो पहिले वह अपने पास जो कुछ रुपया होगा उसे गिनेगा और कल्पना करो कि उसके पास का धन अ है फिर जो कुछ उसने रुपया और आदमियों को उधार

दिया हो उसे गिनेगा और मानो कि उसे उधार में क रुपये लेने हैं तो उसके पास संपूर्ण धन अ+क होगा परन्तु उसे कुछ रुपया देना भी है और वे संपूर्ण धन से कम हैं और उसका मान −ग जानो तो ब्योपारी के पास शेष धन ले दे के अ+क−ग बचेगा और जो संपूर्ण धन से अधिक रुपये देने होंगे तो उस के पास कुछ न बचेगा परन्तु जितना कि ऋण धन से अधिक होगा उतना शेष ऋण उसे और चुकाना होगा और याद रक्खो कि जब केवल राशि के चिन्ह का वर्णन हो तो + वा − चिन्ह जानो और समझो कि राशि धन है वा ऋण ॥

॥ प्रश्न ॥

(१) बीज गणित किसे कहते हैं और उसका प्रयोजन क्या है ॥

(२) राशि का क्या अर्थ है ॥

(३) बीज गणित में राशियों के स्थान में अक्षर क्यों लिखते हैं

(४) अ+क, अ धन क इसका क्या अर्थ है क्या २+५ इसका यह अर्थ है कि दो में पांच जोड़े जायगे ॥

(५) अंक गणित में २३ का क्या अर्थ है और बीज गणित में अक इसका क्या अर्थ है ॥

(६) कैसी राशि के स्थान में ३अ लिखा है ३अ और ३अ−क इन में कौनसी राशि बड़ी है

(७) जो अ, १ के तुल्य हो क २ के तुल्य और ग ३ के तुल्य तो बताओ कि अ क ग, १२३ के तुल्य होगा वा नहीं और जो उसके तुल्य न हो तो किस अंक के तुल्य होगा ॥

(८) अंक गणित में ५ $\frac{2}{3}$ इस का क्या अर्थ है और जो

बीज गणित मे अ $\frac{क}{ग}$ इसका क्या अर्थ है॥

(९) धन राशि की परिभाषा के अनुसार + य इसका क्या अर्थ है॥

(१०) एक राशि के गुणक रूप अवयव ६ और ७ हैं तो वे दोनो राशि एक हैं वा नहीं एक हैं तो क्या है और बताओ कि वह कौन सी राशि है जिसके वे गुणक रूप अवयव हैं क्या अ क ग इसका अक गुणक रूप अवयव है अ क ग जो अक्षर लिखे हैं उन में प्रत्येक दो अक्षर के बीच में कौन सा चिन्ह लुप्त है और दो अक्षरों के पास होने से उनका क्या अर्थ होता है॥

(११) लिखो कि अक − ग शब्द से अक ऋण ग इसका क्या अर्थ हुआ॥

(१२) लिखो कि २अक+३ शब्द से दो अक धन ३ इसका क्या अर्थ है॥

॥संकलन वा जोड़ना॥

जिन राशियों के केवल अंक गुणक भिन्न हैं तो उन राशियों को सजातीय राशि कहते हैं॥

जैसे ४अ, ७अ, १०अ, समान जाति की राशि ऐसेही ३अक, ६अक, समान जाति की राशि हैं अ^{२} ३अ^{२} ५अ^{२} ये भी समान जाति की राशि हैं॥

जिन राशियों के भिन्न अक्षर होते हैं उन्हें विजातीय राशि कहते हैं॥

जैसे अ, क, ये विजातीय राशि हैं और २अ, ३क, ४य,

यह भी विजातीय राशि हैं ऐसे ही अ,क, अ^{2},क, अ^{2}क^{2} विजातीय राशि हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ५अ−३क, ४अ+७क−८अ−५क इनमें से सजातीय राशि एक ओर इकट्ठी करो और उनके चिन्ह भी ज्यों के त्यों रख दो ॥

+५अ	−३क	उत्तर लंब रूप रेखा के एक एक ओर की
+४अ	+७क	राशि सजातीय हैं और दोनों ओर की
−८अ	−५क	राशि मिलकर विजातीय हैं ॥

(२) अ^{3}+३अ^{2}क+३अक^{2}+२अ^{3}+२क^{3}+५अक^{2}−८अ^{2}ग−अ^{2}क−क^{3} इसमें से सजातीय राशियों को अपने २ चिन्ह सहित एक स्थान में इकट्ठी करो ॥

+अ^{3}	+३अ^{2}क	+३अक^{2}	−८अ^{2}ग	+२क^{3}
+अ^{3}	−अ^{2}क	+५अक^{2}		−क^{3}

(३) २अ−३क+७कग+क^{2}ग−५अकग+२यर−३य^{2}+५क^{2}+७क^{2}ग−९अ−२क^{2}+६क+१०अ−५य^{2}−यर+य^{2}+अकग−२कग+ग^{2}−क−३ग इसमें से समान जाति की राशियों को अपने २ चिन्ह सहित इकट्ठा करो ॥

+२अ	−३क	+७कग	+क^{2}ग	−५अकग
−९अ	+६क	−२कग	+७क^{2}ग	+अकग
+१०अ	−क			
+२यर	−३य^{2}	+५क^{2}	+ग^{2}	
−यर	−५य^{2}	−२क^{2}	−३ग	
	+य^{2}			

॥ १५ सजातीय राशियों के जोड़ने की रीति ॥

प्रथम जब जिन राशियों का योग करना हो उनके बाईं ओर एक से चिन्ह हों चाहें वे सब धन हों वा ऋण हों तो उन के योग करने की यह रीति है कि सब गुणक अंकों का योग करो उसे नया गुणक मानो और उस के बाईं ओर सजातीय राशि का चिन्ह लिखकर उस गुणक के दाहनी ओर राशि के अक्षर लिखदो ॥

जैसे ५अ में ४अ जोड़ने से ९अ होते हैं क्यों कि ५अ का अर्थ ५ गुना अ वा अ+अ+अ+अ+अ है और ऐसे ही ४अ का अर्थ ४ गुना (अ) वा अ+अ+अ+अ है इसलिये ५अ में ४ जोड़ने से ९ गुना (अ) होता है वा ९(अ) हुआ

−२क इस का यह अर्थ है कि २क घटाना है और ऐसे ही −३(क) इसका अर्थ यह है कि ३क घटाना है इस लिये −२क में −३क जोड़ने से योग −५क के तुल्य है और उसका अर्थ है कि ५क घटाना है ॥

दूसरे जिन राशियों का योग करना हो उनके चिन्ह भिन्न हों वा कई राशि के चिन्ह धन हों और कई राशियों के चिन्ह ऋण हों तो धन गुणक अंकों का योग करो और ऋण गुणक अंकों का भी योग करो और बड़े योग में से छोटा योग घटा कर शेष के दाहिनी ओर सजातीय राशि के अक्षर लिखदो इस संपूर्ण राशि के बाईं ओर बड़े योग का चिन्ह करदो जैसे ५अ वा +५अ में −२अ जोड़ना हो तो योग +३अ के तुल्य होगा क्योंकि +५(अ) का अर्थ यह है ५अ जोड़ना है और −२अ का अर्थ यह है कि २अ घटाना है दोनों को मिलाने से योग ३(अ) के तुल्य हुआ ॥

३ अ – २ अ – ५ अ और + १० अ को जोड़ना हो तो उनमें १३ अ धन हैं और ७(अ) ऋण इसलिये योग + ६ (अ) के तुल्य है ॥

– ३ अ, २ अ, ५ अ और – १० अ को जोड़ो उनमें ७ अ धन है और १३ अ ऋण है इस लिये योग – ६ अ के तुल्य है

॥ जोड़ने के उदाहरण नीचे लिखते हैं ॥

२य	२अक	–५अ	–अक
४य	५अक	–६अ	–५अक
७य	२अक	–२अ	–३अक
य	अक	–अ	–२अक
योग १४य	१०अक	–१४अ	–११अक

४अ	२यर	३अ^2	१५अक^2
–७अ	७यर	२अ^2	–७अक^2
५अ	–६यर	–६अ^2	–५अक^2
–अ	–यर	७अ^2	९अक^2
अ	+५यर	–४अ^2	–३अक^2
१०अ	यर	–५अ^2	–अक^2
–६अ	–८यर	१०अ^2	–१०अक^2
योग = ६अ	०	७अ^2	–अक^2

तीसरे जब दो वा अधिक पदों की राशियों का योग करना हो तो सजातीय राशियों का योग अलग २ निकाल लो और इन को अपने २ चिन्ह सहित एक सीध

में रखदो वही उत्तर होगा जैसे २अ+३क को ३अ+४क में जोड़ना है तो २अ को ३अ मे जोड़ा तो योग ५अ हुआ और +३क को +४क में जोड़ा तो योग +७क हुआ इसलिये संपूर्ण योग ५अ+७क के तुल्य हुआ॥

ऐसे ही जो ३अ−४क को २अ+३क में जोड़ना हो तो २अ और ३अ मिलके ५अ हुए और −४क और +३क मिल के −क के तुल्य है इसलिये योग ५अ−क हुआ॥

२अ+३क का केवल यही अर्थ है कि २अ में ३क जोड़ना है ऐसे ही ३अ+४क का भी यही अर्थ है कि ३अ में ४क जोड़ना है इसलिये जब हम कहें कि २अ+३क और ३अ+४क इनको जोड़ लाओ तो इसका यह अर्थ साधारण समझो कि २अ, ३क, ३अ, और ४क को जोड़ना है॥

अंकगणित में भी जब उच्च जाति और हीनजाति की राशि जोड़नी होती है तो उच्च जाति की राशियों को अलग जोड़ लेते हैं और हीन जाति की राशियों को अलग जैसे पाइयों में पाई जोड़ते हैं और आने में आने और रुपयों में रुपये॥

॥उदाहरण॥

(१) ५अ−३क और ४अ−७क इनका योग बताओ

५अ−३क	५अ में ४अ जोड़ा तो ९अ
४अ−७क	भया और ३क घटाने हैं और ७क
योग=९अ−१०क	भी घटाने हैं इसलिये सब १०क

घटाने हैं वा −१० क॥

(२) ५ अ − ३ क और ४ अ + ७ क इनका योग निकालो

५ अ − ३ क　　५ अ मे (अ) जोड़ने से योग ६ अ हुआ और ७ क धन में से ३ क ऋण निकाला तो शेष + ४ क रहा॥

४ अ + ७ क

योग = ९ अ + ४ क

(३) ५ अ − ३ क, ४ अ + ७ क और − ८ अ − ५ क इन का योग करो॥

५ अ − ३ क　　यहां ९ अ धन है और ८ (अ) ऋण इसलिये १ अ वा अ धन रहा और ७ क धन है और ८ क ऋण इसलिये १ क वा क ऋण रहा॥

४ अ + ७ क

− ८ अ − ५ क

योग = अ − क

(४) $३ अ^२ + ४ कग − घ^२ + १०$, $−५ अ^२ + ६ कग + २ घ^२ − १५$ और $−४ अ^२ − ९ कग − १० घ^२ + ३१$ इन का योग करो

॥सजातीय राशियों को एक दूसरे के नीचे रक्खो

$३ अ^२ + ४ कग − घ^२ + १०$　　सजातीय राशियों की पहिली वल्ली में $३ अ^२$ धन है $९ अ^२$ ऋण इसलिये $६ अ^२$ ऋण वा $− ६ अ^२$ रहा और

$− ५ अ^२ + ६ कग + २ घ^२ − १५$

$− ४ अ^२ − ९ कग − १० घ^२ + ३१$

योग = $− ६ अ^२ + कग − ९ घ^२ + १६$

दूसरी वल्ली में १० कग धन है और ९ कग ऋण है इस में १ कग वा कग धन वा + कग रहा तीसरी वल्ली में $२ घ^२$ धन है और $११ घ^२$ ऋण है इस में $९ घ^२$ ऋण वा $−९ घ^२$ रहा और चौथी वल्ली में ३१ धन है और २५ ऋण इसमें १६ धन वा + १६ रहा॥

॥६ विजातीय राशियों के योग करने की रीति॥

भिन्न जाति की राशियों के योग करने में यही अर्थ समझो कि राशियों को अपने २ चिन्ह सहित एक सीध में लिखदो जैसे अ – क, ग – घ, और च इन का अ – क + ग – घ + च योग हुआ ॥

इस का अर्थ यही है कि सब राशि इकाई है और यह याद रक्खो कि अ + क इस का अर्थ है कि अ में क जोड़ना है और यह न समझो कि अ में क जुड़ा हुआ है क्योंकि जब तक अ और क इनके मान वा संख्या न मालूम होंगी तब तक अ और क इनका योग नहीं हो सकता ॥

जैसा कोई कहै कि १० मन और ३ सेर पांच छटांक का योग क्या है तो उन्हें एक पंक्ति में इस रीति से लिखेंगे मन १०, सेर ३, छटांक ५ और जो कोई पूछे कि एक कमरे में १० लड़के हैं और दूसरे में ५ हैं तो उनका योग क्या होगा १५ लड़के क्योंकि वे एक ही जाति के हैं इसलिये उन्हें जोड़ देंगे परंतु एक हाते में ३ बैल और दूसरे में पांच घोड़े हैं तो उनका योग क्या होगा तो उन्हें अलग २ करके ही बतावेंगे कि ३ बैल हैं और ५ घोड़े हैं यही उनका जोड़ है कुछ उन को जोड़ कर ८ घोड़े वा ८ बैल न बतावेंगे क्योंकि वे विजातीय हैं इसलिये उनका योग नहीं हो सकता और जिन विजातीय राशियों का योग करना होता है उन्हें अपने चिन्हों समेत एक पंक्ति में लिख देते हैं और वैसे ही उन राशियों का योग समझते हैं ॥

(१७) जिन राशियों का योग करना हो उन में समान जाति और भिन्न जाति की राशि हो तो १५ प्रक्रम के अनुसार सजातीय राशि का योग करके उसके दाहिनी ओर विजातीय

राशियों को अपने२ चिन्ह सहित रख दो॥

(१८) और इसकी कुछ चिंता नहीं कि योग में अक्षर चाहो जिस क्रम से रक्खो परंतु उनके चिन्ह में कुछ अंतर न पड़े और बहुधा योग के अक्षरों को वर्णों के क्रम से लिखते हैं॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ+२क−ग, अ−५घ+२ग और य+र+३घ इनका योग करो॥

अ+२क−ग
अ−५घ+२ग
+३घ+य+र

योग=२अ+२क+ग−२घ+य+र

अ और अ सजातीय राशि हैं
−५घ और +३घ तथा
−ग और +२ग तथा
और शेष राशि विजातीय हैं

(२) ३अ^{2}−कग, २क^{2}−अग, ४ग^{2}−अक और अ^{2}+क^{2}−ग^{2} इनका योग करो॥

३अ^{2}−कग
२क^{2}−अग
४ग^{2}−अक
अ^{2}+क^{2}−ग^{2}

योग=४अ^{2}+३क^{2}+३ग^{2}−अक−अग−कग

३अ^{2} और अ^{2} सजातीय हैं
२क^{2} और +क^{2} तथा
४ग^{2} और −ग^{2} तथा
और शेष राशि विजातीय हैं॥

(३) यर−९य+२ और र^{2}+३ इनका योग करो॥

−१, +२, और +३ सजातीय हैं
और शेष राशि विजातीय हैं

$$\begin{array}{l} प र - १ \\ प^{२} + २ \\ र^{२} + ३ \end{array}$$

$$योग = प^{२} + प र + र^{२} + ४$$

(१८) सजातीय और विजातीय राशियों के योग करने के लिये जो रीति लिखी है वे अंक गणित में जो योग करने की रीति लिखी है उनसे मिलती है जैसे जब हम को ३ सौ और ४ सौ जोड़ने होते हैं तो हम इन सजातीय राशियों के गुण ३ और ४ के योग वा ७ के बाईं ओर सौ लिख देते हैं इसलिये योग ७ सौ के तुल्य हुआ॥

और हमे ३ सैकडे ५ दहाई ६ इकाई इन विजातीय राशियों का योग करना हो तो उनको केवल एक सीध में लिख सकते हैं॥

जैसे ३ सैकडे + ५ दहाई + ६ इकाई वा सूक्ष्म रीति से ३५६ यों लिखेंगे॥

॥३॥ अभ्यास के लिये प्रश्न लिखते हैं॥

(१) अ+क, अ+क इनको जोड़ो।
(२) अ+क और अ−क इनको जोड़ो।
(३) अ−क और अ−क इनको जोड़ो।
(४) अ−क+ग और अ+क−ग इन को जोड़ो।
(५) अ−क+ग और अ+क+ग इनको जोड़ो।
(६) १−२म+३न और ३न−२न इनको जोड़ो।
(७) ५म+३ और २म−४।

(३०) अघ+कघ−२गघ, १/२ अघ १/३ कघ और १/२ अक +२गघ−अग॥

॥व्यवकलन वा घटाना॥

(२९)॥ एक राशि में से दूसरी राशि को घटाने की रीति॥

प्रथम जो राशी सजातीय हों और उन के चिन्ह भी एक से हों अर्थात् सब धन हों वा ऋण तो उन राशियों के अंतर निकालने की यह रीति है कि उन के गुण का अंतर निकाल के उसके बाईं ओर सजातीय राशियों का चिन्ह करदे और उनके अक्षर उसके दाहिनी ओर लिखदे जैसे ५अ में से २अ घटाओ क्योंकि ५अ=३अ+२अ इसलिये ५अ में से २अ वा +२अ निकाला तो शेष ३अ रहा॥

−५अ में से −२अ घटाओ क्योंकि −५अ=−३अ−२अ इसलिये −५अ में से −२अ मिला तो शेष −३अ रहा

दूसरे जो राशि सजातीय हों परन्तु चिन्ह भिन्न हों अर्थात् एक राशि धन हो और दूसरी ऋण तो उनके अंतर निकालने की यह रीति है कि राशियों के गुण का योग करके उसके बाईं ओर उस राशि का चिन्ह करदे जिसमें दूसरी राशि घटानी हो और उस के दाहिनी ओर सजातीय राशि के अक्षर लिखदो। जैसे −५अ में से +२अ घटाओ इसको −५अ−२अ यों लिखेंगे और इसका

यही अर्थ है कि अ राशि ५ बार और २ बार वा ७ बार घटानी है इसे −७अ यों लिखते हैं॥

५अ में से −२अ घटाओ क्योंकि ५अ=७अ−२अ इस लिये ५अ में से −२अ निकाला तो शेष ७अ रहा॥

तीसरे जो राशि विजातीय हों तो उन का अंतर निकालना यही है कि उन राशियों को चिन्ह सहित एक सीध में लिख दो जैसे अ में से क घटाओ तो अ − क यों लिखते हैं

अ में से −क घटाओ क्योंकि अ = अ + क − क इसलिये अ में से −क निकाला तो शेष अ + क रहा ॥

॥ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन्हें इकट्ठा करके ॥
लिखा

५ अ में से २ अ वा + २ अ	घटाया तो शेष + ३ अ रहा
−५ अ में से − २ अ	घटाया तो शेष − ३ अ रहा
− ५ अ में से २ अ वा + २ अ	घटाया तो शेष − ७ अ रहा
+ ५ अ में से − २ अ	घटाया तो शेष + ७ अ रहा
अ वा + अ में से क वा + क	घटाया तो शेष अ − क रहा
अ वा + अ में से − क	घटाया तो शेष अ + क रहा

ऐसे ही और उदाहरण करने से यह जान पड़ता है कि नीचे जो राशि लिखी हैं वह घटाने के सब प्रश्न के लिये अवश्य होगी

॥ रीति ॥

जिस राशि को घटाना हो उसका चिन्ह बदल दो अर्थात जो उसका चिन्ह + धन हो तो उसके स्थान में − ऋण चिन्ह करदो ॥

और जो उसका चिन्ह − हो तो उसके स्थान में + धन रक्खो और फिर योग करने की रीति से उत्तर निकालो

॥ उदाहरण ॥

(१) अ से	(२) ७ अ से	(३) अ से
अ घटाओ	६ अ निकालो	अ घटाओ
अंतर = २ अ	अ	०

(४) ३अ से (५) ७अ से (६) अ से

− अ घटाओ — −६अ घटाओ — −अ घटाओ

अंतर= ४अ — १३अ — २अ

(७) −३अ से (८) −७अ से (९) −अ से

अ घटाओ — +६अ — अ घटाओ

अंतर= −४अ — −१३अ — −२अ

(१०) −३अ से (११) −७अ से (१२) −अ से

− अ घटाओ — −६अ — −अ घटाओ

अंतर= २अ — −अ — ०

(१३) −अ+क से (१४) अ−क से (१५) र+अय से

अ−क घटाओ — अ+क — र−अय घटा०

अंतर= २अ+२क — −२क — २अय

(१६) ३अ−४क+६ग से (१७) ७अ−२क+४ग−२

अ−२क+८ग — ६अ−६क+४ग−१

अंतर= २अ−२क−२ग — अंतर= अ+४क−१

(१८) $२अ^२$−६अक−अग+५ से

$४अ^२$−८अक−२अग−१

अंतर= −$२अ^२$+२अक+अग+६

(१९) ३यर−$य^२$−$र^२$+अ

२यर+$य^२$+$र^२$−व

अंतर= यर−$२य^२$−$२र^२$+अ−व

(२०) $अ^२$+२अक−$३ग^२$ (२१) $५य^२$−४यर+$र^२$

$२अ^२$−५अक−$७ग^२$ — −$य^२$+५यर+$३र^२$

अंतर= −$अ^२$+७अक+$४ग^२$ — अंतर= $६य^२$−९यर−$२र^२$

(२२) $८अ^2 + य^2 - ५क^2 - ५ग^2$
$य^2 + २क^2 - ५ग^2$

अंतर $= ८अ^2 - ७क^2$

(२३) $य^3 - ३य^2 + ६य - १०$
$य^3 - ४य^2 + ८य - ९$

अंतर $= य^2 - २य - १$

(२४) $अ + \frac{१}{२}क + १$
$\frac{१}{२}अ + क + \frac{१}{२}$

अंतर $= \frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}क + \frac{१}{२}$

(२५) $\frac{३}{२}य^3 - \frac{५}{४}यर + \frac{३}{२}य^2$
$\frac{१}{२}य^3 - \frac{१}{४}यर - \frac{१}{२}य^2$

अंतर $= य^3 - यर + २य^2$

(२०) क्योंकि अ+क में अ−क जोड़ने से योग २अ के तु-
ल्य है और अ+क में से २अ+क घटाने से अंतर २(क) के
तुल्य है इस्से यह बात निकलती है कि किसी दो राशि के
के अंतर में उनका योग जोड़ा जाय तो वह योग दोगुनी बड़ी
राशि के तुल्य होगा और जो अंतर को योग में से घटावें तो
शेष दोगुनी छोटी राशि के तुल्य होगा॥

इस रीति से नीचे जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर निकल
आते हैं यही रीति लीलावती में भी लिखी है उसे संक्रम
ण कहते हैं परन्तु लीलावती पढ़ने वाले लोग उस ग-
णित का मूल ऐसा नहीं समझते जैसा बीज गणित पढ़ने
वाले जानते हैं इसका और अभी ऊपर स्पष्ट लिख चुके
हैं और इस के उदाहरण आगे लिखते हैं॥

॥प्रश्न॥

दो संख्याओं का योग १०० है और उनका अंतर
५० है तो बताओ कि वे संख्या कौन सी हैं॥

दुगुनी बड़ी राशि = १०० + ५० = १५०
इस लिये बड़ी राशि = ७५
और दोनों राशियों का अंतर = ५० है॥

इसलिये छोटी राशि = ७५ − ५० = २५

इस कारण ७५ और २५ दोनों राशि हैं

(२) एक पुरुष और स्त्री की अवस्था मिलकर ७७ वर्ष की है उनमें पुरुष की अवस्था स्त्री की अवस्था से ७ वर्ष अधिक है तो बताओ कि हर एक की अवस्था क्या है॥

बड़े पुरुष की दुगुनी अवस्था = ७७ + ७ = ८४

इसलिये बड़े पुरुष की अवस्था = ४२ वर्ष

और इस कारण दूसरे की उमर = ४२ − ७ = ३५ वर्ष

(३) $\frac{१}{२}$ के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड से $\frac{१}{४}$ के तुल्य बड़ा हो॥

दोनों खंडो का योग = $\frac{१}{२}$

दोनों खंडो का अन्तर = $\frac{१}{४}$

दो गुना बड़ा खंड = $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} = \frac{३}{४}$

इसलिये बड़ा खंड = $\frac{३}{४}$ का $\frac{१}{२} = \frac{३}{८}$

ऐसे ही दो गुना छोटा खंड = $\frac{१}{२} - \frac{१}{४} = \frac{१}{४}$

इसलिये छोटा खंड = $\frac{१}{४}$ का $\frac{१}{२} = \frac{१}{८}$

इस कारण दोनों खंड $\frac{३}{८}$ और $\frac{१}{८}$ हैं॥

॥अभ्यास के लिये उदाहरण॥

(१) अ से क − म घटाओ॥

(२) अ+क−ग−घ सें अ−क+ग−घ घटाओ ॥

(३) ६अ−क−ग से अ−क+२ग घटाओ ॥

(४) ८अ+य−२क−५ग से य+२क−५ग घटाओ ॥

(५) ३य+२र−५ल से २य+३र+४ल घटाओ ॥

(६) २अय+कर−ग से अय−कर+ग घटाओ ॥

(७) ३कग−अक+अ से २कग+अक−अ घटाओ ॥

(८) यर+य^{२}+र^{२} से यर−य^{२}+र^{२} ॥

(९) २यर+३य^{२}+४र^{२} से यर−२य^{२}−र^{२} ॥

(१०) २मन+५म−२न से मन+म+न ॥

(११) −२यर+मय−पर से −३यर−२मय−पर ॥

(१२) ५अकग−२अक−३अग से २अकग+अक−अग +२

(१३) अ^{२}−क^{२}−ग^{२} से अ^{२}−२क^{२}−२ग^{२}

(१४) ४अय−३अ^{२}+२य^{२} से २अय−अ^{२}+३य^{२} ॥

(१५) ३अ^{२}क+२अ^{२}ग−५ग से अ^{२}क−अ^{२}ग−७ग^{२}

(१६) २पर+३अ−अ^{२}क+५ से २अ−अ^{२}क+६

(१७) $\frac{३}{२}$अय−$\frac{१}{२}$यर+$\frac{३}{२}$ से $\frac{१}{२}$अय+$\frac{१}{२}$यर−$\frac{३}{२}$

(१८) अ+क−ग से $\frac{१}{२}$अ−$\frac{१}{२}$क−$\frac{१}{२}$ग

॥ उदाहरण ॥

(२१) एक पद की राशि को दूसरे पद की राशि से गुणा करने की रीति ॥

प्रथम जो दोनों राशि धन हों जैसे २अ और ३क तो उनका घात ४ प्रक्रम के अनुसार २अ×३क के तुल्य है ॥

२ अ × ३ क = २ × अ × ३ × क और अ × ३ = ३ × अ (प्रक्रम ५)
इसलिये घात = २ × ३ × अ × क = ६ अ क क्योंकि २ × ३ = ६ ।

दूसरे जो एक राशि ऋण हो जैसे २ अ को −३ क बार गुणा करो ध −२ क को ३ क बार गुणा करो इन दोनों प्रश्नों का यही अर्थ है कि ३ क को २ अ बार घटाना है इसलिये ३ क को २ अ बार जोड़ैं तो इस घात और पहिली घात में केवल चिन्ह का ही अन्तर होगा इसलिये घात −६ अ क के तुल्य होगा ॥

तीसरे जो दोनों राशि ऋण हों जैसे −२ अ और −३ क को गुणा करो इसका यह अर्थ है −३ क को २ अ बार अर्थात् −६ अ क घटाना है परन्तु (२६ प्रक्रम) −६ अ क को जो घटावें गे तो उस के चिन्ह को बदल देवे गे जैसे +६ अ क लिखेंगे और इस का यह अर्थ है कि ६ अ क जोड़ना है ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन सब को इकट्ठा करके लिखते हैं ॥

+३ क को +२ अ से गुणा तो घात +६ अ क हुआ ॥
−३ क को +२ अ से गुणा तो घात −६ अ क हुआ ॥
+३ क को −२ अ से गुणा तो घात −६ अ क हुआ ॥
−३ क को −२ अ से गुणा तो घात +६ अ क हुआ ॥

रीति

जिन एक पद की राशियों का गुणा करना हो उनके अक्षरों को पास पास लिखो वेही घात के गुणक रूप अवयव होंगे फिर इन के गुणके अंकों को गुणकर घात का गुण

जानो और जो दोनों पद के चिन्ह एक से हों तो घात का चिन्ह धन मानो और जो दोनों पद के चिन्ह एक से न हों तो घात का चिन्ह ऋण रक्खो ॥

॥उदाहरण ॥

२य × ५ र = १०यर, −३ × ५अ = −१५ अ ७ म × − न = −७ मन, २ अक × ३ अग = ६ अ, अ क ग = ६अ² कग, −७ अ यर × ४ अ क ग = −२८ अ² कग यर, २अ × ३क × ४ग = ६ अ क × ४ ग = ६ × ४ × अ क ग = २४ अकग ॥

२२ प्र० जब कि दो वा अधिक पद की राशियों को एक पद की राशि से गुणा करना हो ॥

कल्पना करो अ + क + ग + आदि को म से गुणा करना है तो अ को म बार गुणा करना तो घात मअ के तुल्य हुआ क को म से गुणा किया तो मक हुआ ग को म से गुणा किया तो मग हुआ, आदि और इन घातों का योग मअ + मक + मग आदि इष्ट घात के तुल्य हुआ क्यों कि यह प्रत्यक्ष है कि जिन खंडो से संपूर्ण राशि बनी है उन को पृथक २ म से गुणा कर घातों को जोड़ दिया उसका यही अर्थ है कि संपूर्ण राशि म से गुणी गई है और वह योग संपूर्ण घात के तुल्य है इस्से यह रीति निकलती है कि (२१ प्रक्रम) के अनुसार गुण्य के प्रत्येक पद को जुदा २ गुणक के पद से गुण लो तो उन्हीं घातों का योग इष्ट घात के तुल्य होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ + क − ग को २ से गुणा तो घात = २अ + २क − २ग ॥

(२) अ − क + ग को −२ तथा = अ + क − २ग ।।
(३) अ − क + ग को घ तथा = अघ − कघ + गघ − गघ
(४) अ − क + ग को −घ तथा = −अघ + कघ − गघ ।।
(५) अय + कर को ग तथा = अगय + कगर ।।
(६) अय + कर − गल को २प तथा = २अपय + २कपर − २गपल ।।
(७) २अ + ३क − ४ग को २य तथा = ४अय + ६कय − ८गय
(८) अय + कर को −अय तथा = अ^{२}य^{२} + अकयर ।।
(९) अय + कर को −कर तथा = −अकयर − क^{२}र^{२} ।।
(१०) ७य − ४र + ६ को ३य तथा = २१य^{२} − १२यर + १८य ।।
(११) ६य^{२} − १३य + १ को ५ तथा = ३०य^{२} − ६५य + ५ ।।
(१२) य^{२} − पय + फ को पय तथा = पय^{३} − प^{२}य^{२} + पफय ।।
(१३) जिन दो राशियों को गुणा करना हो उन में जो प्रत्येक राशि में दो वा अधिक पद हों तो उनके गुणा करने की रीति सिखते हैं ।।

कल्पना करो कि अ + क को ग + घ से गुणा करना है तो इसका यह अर्थ है कि अ + क को ग + घ बार जोड़ना है अर्थात् अ + क को ग बार जोड़ना है और फिर उसे ही घ बार जोड़ना है (२२ प्रक्रम की रीति के अनुसार अ + क को ग से गुणा तो घात अग + कग हुआ । और ऐसे ही अ + क को घ से गुणा तो घात अघ + कघ हुआ इसलिये अ + क को ग और घ वा ग + घ से गुणा तो अग + कग + अघ + कघ इष्ट घात हुआ ।।

जो अ + क को ग − घ से गुणा करना हो तो इसका तुम यह अर्थ समझो कि अ − क को ग बार जोड़ना है

और उसे ही घबार घटाना है॥

अ+क को ग से गुणा तो अग+कग घात हुआ और अ+क को घ से गुणा तो अघ+कघ घात हुआ इसे अगले घात में से १९ अक्रम के अनुसार घटाया तो अग+कग-अघ-कघ यही इष्ट घात हुआ॥

जो अ-क को ग-घ से गुणा करना हो तो तुम इसका यह अर्थ समझो कि अ-क को गबार गुणा करना है और उस में से अ+क को घ बार घटाना है इसलिये अग+कग में से अघ-कघ घटाया तो अग-कग-अघ+कघ इष्ट घात हुआ॥

॥ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन्हें॥

इकट्ठा करके लिखते हैं

अ+क को ग+घ से गुणा तो घात=अग+कग+अघ+कघ॥

अ+क को ग-घ से तथा=अग+कग-अघ-कघ॥

अ-क को ग-घ से तथा=अग-कग-अघ+कघ॥

॥ऐसे ही और उदाहरणों से भी यह रीति निकलती है॥

॥ रीति ॥

गुण्य के हर एक पद को गुणक के हर एक पद से गुणा करो इन ही घातों का योग संपूर्ण घात के तुल्य होगा॥

॥उदाहरण॥

(१) य+२ को
य+२ से गुणा करो॥

$य^{2}+य$ यह घात गुण्य को य से गुणा तो हुआ ॥
$+ २य + २$ यह घात गुण्य को २ से गुणा तो हुआ ॥

$य^{2}+ ३य + २$ संपूर्ण घात हुआ

(२) २१ वा २०+१ को
१९ वा २० − १ से गुणा करो ॥

१८९, ४००+२०
२१ − २० − १

---

३९९ वा ४०० − १

(३) २ + अ को
३ − क से गुणा करो ।

---

६ + ३अ यह घात गुण्य को ३ से गुणा तो हुआ ॥
− २क − अक यह घात गुण्य को − क से गुणा तो हुआ

---

६ + ३अ − २क − अक संपूर्ण घात हुआ

(४) अ + क को
अ + क से गुणा करो

$अ^{2}+$ अक यह घात गुण्य को अ से गुणा तो हुआ ॥
$+$ अक $+ क^{2}$ यह घात गुण्य को क से गुणा तो हुआ ॥

$अ^{2}+ २अक + क^{2}$ संपूर्ण घात

(५) अ − क को
अ − क से

$अ^{2}-$ अक यह घात गुण्य को अ से गुणा तो हुआ ॥

$-$अक $+$ क^{२} यह घात गुण्य को $-$क से गुणा तो हुआ

अ^{२} $-$ २अक $+$ क^{२} संपूर्ण घात हुआ

(६) य $-$ २र को

२य $+$ ३र से गुणा करो

२य^{२} $-$ ४यर यह घात गुण्य को २य से गुणा तो हुआ

$+$ ३यर $-$ ६र^{२} यह घात गुण्य को ३र से गुणा तो हुआ

२य^{२} $-$ यर $-$ ६र^{२} संपूर्ण घात हुआ

अब एक ऐसा उदाहरण लिखते हैं जिसके गुण्य और गुणक दो नोंमें दो दो पद से अधिक पद हैं ॥

२अ $+$ ३क $-$ ४ग को

अ $+$ क $-$ ग से गुणा करो ॥

२अ^{२} $+$ ३अक $-$ ४अग यह घात गुण्य को अ से गुणा तो हुआ

$+$ २अक $+$ ३क^{२} $-$ ४कग तथा $+$ क से

$-$ २अग $-$ ३कग $+$ ४ग^{२} तथा $-$ ग से

२अ^{२} $+$ ५अक $-$ ६अग $+$ ३क^{२} $-$ ७कग $+$ ४ग^{२} संपूर्ण घात हुआ ॥

॥२७॥ अक्रम के अनुसार एक राशि के घातों के गुणा करने की रीति ॥

एक ही राशि के भिन्न भिन्न घातों को गुणा करना हो उन के घात प्रकाशक का योग करो वही योग इष्ट घात का घात

प्रकाशक होगा॥

जैसे $अ^{2} \times अ^{3} = अ^{5}$ क्योंकि प्रक्रम ६ के अनुसार $अ^{2} = अ \times अ$ और $अ^{3} = अ \times अ \times अ$ इसलिये $अ^{2} \times अ^{3} = अअ \times अअअ = अअअअअ = अ^{5}$ इसी रीति से यह भी जानो कि $अ^{6} \times अ^{10} = अ^{16}$ और ऐसे ही जो और घात प्रकाशक अंक हों तो घातों का गुणा करने में योग होता है॥

जैसे $अ^{म} \times अ^{न} = अ^{म+न}$ इस उदाहरण में म और न के स्थान में चाहो सो अंक रखदो॥

॥६ प्रक्रम की परिभाषा के अनुसार॥

$अ^{म}$ = अ-अ-अ आदि अ से अ को गुणा करते चले जाओ जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण म हो और ऐसे ही

$अ^{न}$ = अ - अ - अ आदि अ से अ को गुणा करते चले जाओ जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण न हो॥

∴ $अ^{म} \times अ^{न}$ = अ-अ-अ आदि म गुणक रूप अवयवों तक गुणा करो॥

× अ-अ-अ आदि न गुणक रूप अवयवों तक गुणा करो

= अ-अ-अ आदि जब तक गुणक रूप अवयवों का परिमाण म+न हो॥

$= अ^{म+न}$ परिभाषा के अनुसार

अनुमान जो अ के स्थान में अ+क वा अ+क+ग वा और कोई राशि लिखें तो उस के भिन्न घातों को गुणा करेंगे तो उन के घात प्रकाशक का योग करलेंगे॥

जैसे अ का दूसरे घात को उसी राशि के तीसरे घात से गुणा करैं तो इस घात उसी राशि के पाँचवें घात के तुल्य होगा ॥

॥उदाहरण॥

(१) $२य^{२} \times ३य^{३} = २ \times ३ य^{२} य^{३} = ६य^{५}$ ॥

(२) $७अय \times २अयर = ७ \times २ अ अ य य र = १४अ^{२}य^{२}र$ ॥

(३) $५अ^{६}कग \times अकग = ५अ^{६}अ क क ग ग = ५अ^{७}क^{२}ग^{२}$ ॥

(४) $३य^{२}र^{२}ल^{२} \times ४य^{३}र^{२}ल^{२} = ३ \times ४ य^{२}य^{३} र^{२}र^{२} ल^{२}ल^{२} = १२य^{५}र^{४}ल^{४}$ ॥

(५) $मन य^{३}र \times -पर = -मन पय^{३} र र = -मन पय^{३}र^{२}$ ॥

(६) $-४अक^{२}गय \times -२अगय^{२}र = ८ अ अ क^{२} ग ग य य^{२} र = ८अ^{२}क^{२}ग^{२}य^{३}र$ ॥

(७) $२अ^{म} \times ३अ^{३} = २ \times ३ \times अ^{म} अ^{३} = ६अ^{म+३}$ ॥

(८) $अय^{म} \times कय^{न} = अक य^{म} य^{न} = अकय^{म+न}$ ॥

(९) $अय^{म} \times कय^{न} \times गय^{प} = अकग य^{म} य^{न} य^{प} = अकगय^{म+न+प}$ ॥

(१०) $२अय \times -३कर \times -अय^{२}र = २ \times -३ \times -१ \times अ^{२} क य^{३} र^{२} = ६अ^{२}कय^{३}र^{२}$ ॥

॥उदाहरण॥

(१) $अयर$ को $क$ से गुणा करो ॥

(२) $३मन$ को $-प$ से गुणा करो ॥

(३) $३म+न-प$ को ३ से गुणा करो ॥

(४) $अय+कय$ को $प$ से गुणा करो ॥

(५) $अय^{२}+२कय$ को $२अ$ से गुणा करो ॥

(६) $४अ^{२}-२अयर$ को $अय$ से गुणा करो ॥

(७) $३य-२यर+६$ को $-यर$ से गुणा करो ॥

(८) $१-२अय+३कय^{२}$ को $३न$ से गुणा करो ॥

(९) २अक−३अग+५कघ को −२य से गुणा करो॥
(१०) २यर−३ को ७य से गुणा करो॥
(११) अय+कर−गल को २यरल से गुणा करो॥
(१२) २अ^{2}−कय+घ को कर से गुणा करो॥
(१३) अ+य को क+र से गुणा करो॥
(१४) ६य+४ को य−१ से गुणा करो॥
(१५) य−४ को य+३ से गुणा करो॥
(१६) २य−५ को ३य−२ से गुणा करो॥
(१७) १−य को य+१ से गुणा करो॥
(१८) १−य को १−२य^{2} से गुणा करो॥
(१९) अय+कर को २य−र से गुणा करो॥
(२०) अ+२य को अ−३य से गुणा करो॥
(२१) ७य−१ को ५य−४ से गुणा करो॥
(२२) २अय−३कर को ४र−३य से गुणा करो॥
(२३) १−२मन को २म+न से गुणा करो॥
(२४) अ^{2}−कग को अग−क^{2} से गुणा करो॥
(२५) १+२य+३र को य−र से गुणा करो॥
(२६) अय−र को क−र से गुणा करो॥
(२७) अग−कग+अघ को २अ−क से गुणा करो॥
(२८) अ^{3}+अ^{2}+अ+१ को अ−१ से गुणा करो॥
(२९)
य^{3}+अय^{2}+अ^{2}य+अ^{3} को य−अ से गुणा करो॥
(३०) ४य^{2}−६य+९ को २य+३ से गुणा करो॥
(३१) ४+२य+य^{2} को ४−२य+य^{2} से गुणा करो॥
(३२) अ−२य^{2} को अ^{3}−य से गुणा करो॥

(३३) $य^{३}+३य^{२}+९य+२७$ को $य-३$ से गुणा करो ॥

(३४) $२अ^{४}य+३का^{२}र$ को $२अ^{४}य^{२}-३कार$ से गुणा करो

(३५) $२अ^{२}-३अक+क^{२}$ को $२अ^{२}+३अक-क^{२}$ से गुणा करो ॥

॥ भाग देना ॥

भाज्य भाजक और लब्धि इन शब्दों का जो अर्थ अंक गणित में है वही अर्थ उन का बीजगणित में भी है एक राशि में दूसरी राशि का भाग देने से यह अर्थ समझो कि पहिली राशि में दूसरी राशि के बार जा सकती है और जो लब्धि को भाजक से गुणा करो तो घात भाज्य के तुल्य होगा ॥

॥ (३५) ॥ एक पद में एक पद के भाग देने की रीति ॥

क्योंकि लब्धि × भाजक = भाज्य इसलिये जो भाज्य के दो ऐसे गुणक रूप अवयव करले कि एक गुणक रूप अवयव भाजक के समान हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लब्धि के तुल्य होगा ॥

जैसे ३य में य का भाग दे तो क्योंकि ३य में य का ३ गुण है इसलिये ३ लब्धि होगी और जो ३य में ३ का भाग देना हो तो क्योंकि ३य में ३ का य गुण है इसलिये य लब्धि हुई ॥

इस्से यह बात निकलती है कि जो एक पद में दूसरे पद का निश्शेष भाग लग जाय तो भाग देने की यह रीति है कि भाज्य के दो ऐसे गुणक रूप अवयव करलो जिन में एक गुणक रूप अवयव भाजक हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लब्धि होगा ॥

।।उदाहरण।।

(१) ६अकग में २अक का भाग दो ।।

६अकग=२अक×३ग इसकारण ३ग लब्धि हुई

(२) १०यर में २र का भाग दो ।।

१०यर=२र×५य इसलिये ५य लब्धि हुई ।।

(३) —७अयर में ७अय का भाग दो ।।

—७अयर=७अय×—र इसलिये —र लब्धि हुई ।।

(४) ६मनयर में —मयर का भाग दो ।।

६मनयर=—मयर×—६न इसलिये —६न लब्धि हुई ।।

(५) —१४अ²कग में —२अक का भाग दो ।।

—१४अ²कग=—२अक×७अग इसलिये ७अग लब्धि हुई ।।

(६) —८अ²क³ग⁴ में ४अकग का भाग दो ।।

८अ²क³ग⁴=४अकग×—२अक²ग³ इसलिये —२अक²ग³ लब्धि हुई ।।

(७) ५अ³क³ग⁵ में अ²कग² का भाग दो ।।

५अ³क³ग⁵=अ²कग²×५अक²ग³ इसलिये ५अक²ग³ लब्धि हुई ।।

(८) २१मन³य में ३मनय का भाग दो ।।

२१मन³य=३मनय×७न² इसलिये ७न² लब्धि हुई ।।

।।(२८) जब कि एक राशि में दो वा अधिक पद हों उसमें एक

।।पद के भाग देने की रीति ।।

क्योंकि २४ क्रम के अनुसार अ+क+ग+ आदि को म से गुणा

तो मअ+मक+मग+ आदि यह घात हुआ इसलिये मअ+

मक + मग + आदि में म का भाग दिया तो क + ग + आदि लब्धि हुई इस्से यह रीति निकलती है॥

॥ रीति ॥

भाज्य के हर एक पद में भाजक का २५ प्रक्रम के अनुसार भाग दो तो इन सब लब्धियों का योग संपूर्ण लब्धि के तुल्य होगा॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अक + २अग − ३अघ में अ का भाग दो॥

अक ÷ अ = क, + २अग ÷ अ = + २ग, − ३अघ ÷ अ = − ३घ इसलिये संपूर्ण राशि में अ का भाग देने से क + २ग − ३घ संपूर्ण लब्धि हुई॥

(२) $मय + नय^२ − पय^३$ में य का भाग दो॥

मय ÷ य = म, + $नय^२$ ÷ य = + नय − $पय^३$ ÷ य, = − $पय^२$ इसलिये संपूर्णराशि में य का भाग देने से म + नय − $पय^२$ यह संपूर्ण लब्धि हुई॥

(३) $४अ^३य^२ − ६अ^२कय + २अय$ में २अय का भाग दो॥

$४अ^३य^२ ÷ २अय = २अ^२य − ६अ^२कय ÷ २अय = − ३अक + २अय ÷ २अय = + १$ इसलिये $२अ^२य − ३अक + १$ यह संपूर्ण लब्धि हुई॥

॥(२७) जब भाजक में दो वा अधिक पद हों तो भाग देने की रीति लिखते हैं॥

॥ रीति ॥

प्रथम भाज्य और भाजक दोनों के पदों को इस क्रम से लिखो कि किसी अक्षर के प्रत्येक घात में जो सब से बड़ा घात पहिले पद में लिखा जाय उस से छोटा घात दूसरे पद

में लिखो और ऐसे ही और जो घात हों उन्हें स्थापन करो वा जो सब से छोटा घात पद में लिखा जाय तो उसे बड़े घात को दूसरे पद में लिखो और इसी क्रम से सब घातों को स्थापन करो

दूसरे २४ प्रक्रम के अनुसार देखो कि भाज्य के पहिले पद में भाजक का पहिला पद के बार जा सकता है और इसे लब्धि के स्थान में रक्खो॥

तीसरे इस लब्धि से संपूर्ण भाजक को गुणाकर घात को भाज्य से घटाओ॥

चौथे और शेष को नया भाज्य मान ऊपर की क्रिया करो और जो लब्धि मिले उसे पूर्व लब्धि के दाहिनी ओर रक्खो और यह क्रिया वहां तक करो जब कि शेष ० रहजाय वा भाज्य भाजक से कम तो सब लब्धियों का योग संपूर्ण लब्धि होगी॥

ऊपर जो भाग देने की रीति लिखी है वह अंक गणित के भाग देने की रीति से मिलती है॥

जैसे जो तीन हजार चौरासी में, बत्तीस का भाग देना होता है तो हम भाज्य और भाजक को १० के घातों के अनुसार क्रम से लिखते हैं॥

जैसे भाजक ३२ यों लिखते हैं और इस का यह अर्थ है ३×१०+२ और ऐसे ही भाज्य ३०८४ का अर्थ है ३×१०२+८×१०+४ तो भाग देने से हम यह देखते हैं कि भाजक का पहिला पद वा ३×१० वा ३० भाज्य के पहिले पद वा ३×१०२ वा ३०० में १० बार जा सकता है इसलिये १० लब्धि का एक भाग हुआ फिर १० गुणा ३२ वा ३२० को ३०८४ में से घटाया तो शेष ८४ रहा इसे नया भाज्य मान इस में ३२ का भाग

दिया तो २ दूसरी लब्धि मिली इसे पूर्व लब्धि १० में जोड़ा तो १०+२ वा १२ संपूर्ण लब्धि मिली ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अग + कग + अघ + कघ में अ + क का भाग दो इस उदाहरण में अ अक्षर के क्रम से भाज्य और भाजक के पदों को लिखा ॥

भाजक	भाज्य	लब्धि
अ+क)	अग + कग + अघ + कघ	(ग + घ
	अग + कग	
	+ अघ + कघ	
	+ अघ + कघ	
	०	

∴ ग + घ लब्धि हुई ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस में पहिले तो हम यह देखते हैं कि अग में अ, ग बार जा सकता है इस लिये हमने ग को लब्धि का अंश मान उसे भाज्य के दाहिनी ओर रक्खा फिर अ + क भाजक को ग, से गुणाकर, अग + कग घात को भाज्य में से घटाया तो + अघ + कघ शेष रहा इस शेष को नया भाज्य मान इस में अ का भाग दिया तो + घ लब्धि का दूसरा अंश मिला, इसे पूर्व लब्धि ग के दाहिनी ओर रक्खा तो ग + घ संपूर्ण लब्धि हुई और भाग देने के पीछे शेष कुछ न रहा।

(२) उ॰ $अ^2 + क^2 - २अक$ में अ − क का भाग दो ॥

भाज्य और भाजक के पदों को अ के घातों के अनुसार रक्खा तो अ − क भाजक और अ² − २अक + क² भाज्य हुआ

अ − क) अ² − २अक + क² (अ − क लब्धि हुई॥
अ² − अक
____
− अक + क²
− अक + क²
____
०

हम देखते हैं कि अ² में अ, अ बार जा सकता है यह लब्धि का पहिला पद हुआ फिर अ − क भाजक को अ से गुणा तो अ² − अक घात हुआ इसे भाज्य में से घटाया तो − अक + क² शेष रहा इसके − अक पद में, अ का भाग दिया तो − क लब्धि का दूसरा पद मिला फिर अ − क भाजक को − क से गुणा कर घात − अक + क² को पूर्व शेष में से घटाया तो शेष ० रही, इसलिये अ − क संपूर्ण लब्धि हुई॥

३ उ० २अ² + ३क² + ४ग² + ५अक − ६अग − ७कग में अ + क − ग का भाग दो॥

पदों को अ के घातों के अनुसार स्थापन किया॥

अ + क − ग) २अ² + ५अक + ६अग + ३क² − ७कग + ४ग² २अ + ३क − ४ग
२अ² + २अक − २अग
____
+ ३अक − ४अग + ३क² − ७कग + ४ग²
+ ३अक + ३क² − ३कग
____

$$-४अग - ४कग + ४ग^{२}$$
$$-४अग - ४कग + ४ग^{२}$$

$$०$$

∴ $२अ + २क - ४ग$ संपूर्ण लब्धि हुई॥

४ उ० $६४ - अ^{६}$ में $२ - अ$ का भाग दो

$$२ - अ)\ ६४ - अ^{६}\ (३२ + १६अ + ८अ^{२} + ४अ^{३} + २अ^{४} + अ^{५}$$
$$६४ - ३२अ$$
$$३२अ - अ^{६}$$
$$३२अ - १६अ^{२}$$
$$१६अ^{२} - अ^{६}$$
$$१६अ^{२} - ८अ^{३}$$
$$८अ^{३} - अ^{६}$$
$$८अ^{३} - ४अ^{४}$$
$$४अ^{४} - अ^{६}$$
$$४अ^{४} - २अ^{५}$$
$$२अ^{५} - अ^{६}$$
$$२अ^{५} - अ^{६}$$
$$०$$

इसलिये $३२ + १६अ + ८अ^{२} + ४अ^{३} + २अ^{४} + अ^{५}$ लब्धि हुई॥

॥६ अभ्यास के लिये उदाहरण॥

(१) ७य में ७ का भाग दो॥

(२) ७य में य का भाग दो॥

(३) ७अय में अ का भाग दो॥

(४) ७अय में ७य का भाग दो॥

(५) ३अकय में अक का भाग दो॥

(६) ३अकग में ३कग का भाग दो॥

(७) —अयर में य का भाग दो॥

(८) अयर में —य का भाग दो॥

(९) ६अ^{२}मन में —२मन^{२}अ का भाग दो॥

(१०) १४अ^{३}य^{२}र में ७अ^{२}र का भाग दो॥

(११) —७मन^{२}पय में $\frac{१}{३}$ मनप का भाग दो॥

(१२) —$\frac{२}{३}$ अकय^{२}र में —$\frac{१}{३}$ अयर का भाग दो॥

(१३) ३अग—२अकय में २अ का भाग दो॥

(१४) ४अग—२अकघ में २अ का भाग दो॥

(१५) ८य^{२}—६यर में —२य का भाग दो॥

(१६) ३क^{२}ग^{२}+२४अकग^{२} ६क^{२}ग^{२} में —३कग का भाग दो॥

(१७) ४अ^{३}य^{२}—८अकय—२अ^{२}य में —२अय का भाग दो॥

(१८) अ^{२}य^{२}—५अकय^{३}+६अय^{४} में अय^{२} का भाग दो॥

(१९) य^{२}+३य+२ में य+२ का भाग दो॥

(२०) अग—कग+अघ—कघ में अ—क का भाग दो॥

(२१) ६+३अ—२क—अक में २+अ का भाग दो॥

(२२) ४अ^{२}—१५य^{२}—४अय में २अ+३य का भाग दो॥

(२३) २अ^{२}+अ—६ में २अ—३ का भाग दो॥

(२४) २अक+६अकग—८अकगघ में १+३ग—४गघ का भाग दो॥

(२५) २य^{२}+१९य—३५ में य+७ का भाग दो॥

(२६) ३य^{४}+१४य^{३}+९य+२ में य^{२}+५य+१ का भाग दो॥

(२७) अक+२अ^{२}—३क^{२}—४कग—अग—ग^{२} में २अ+३क+ग का भाग दो॥

(२८) $१५अ^{४} + १०अ^{३}य + ४अ^{२}य^{२} + ६अय^{३} - ३य^{४}$ में $३अ^{२} - य^{२} + २अय$ का भाग दो ॥

(२९) $बप^{३} + ३प^{२}ब^{२} - २पब^{३} - २ब^{४}$ में $प^{२} - ब^{२}$ का भाग दो ॥

(३०) $अ^{२}य^{२} + अ^{५} - २अ^{३}कय + क^{२}य^{२} + अ^{२}क^{२} - २अ^{४}क$ में $अय - कय + अ^{२} - अक$ का भाग दो ॥

(३१) $३२य^{५} + २४३$ में $२य + ३$ का भाग दो ॥

॥ सम महत्तमापवर्तक ॥

२८ प्र० परिभाषा जिस एक राशि में दूसरी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो पहिली राशि को अपवर्त्य कहते हैं और दूसरी को अपवर्तक इसलिये जो दो वा अधिक राशियों में एक राशि का निःशेष भाग लग जाय तो उन राशियों को समापवर्तक कहते हैं क्योंकि वह सब राशियों का अपवर्तक है और इस कारण सबसे बड़े सम भाजक को सम महत्तमापवर्तक कहते हैं ॥

अपवर्तक केवल भाजक का दूसरा नाम है और अपवर्तक उस भाजक को कहते हैं जिसका भाज्य में निःशेष भाग लग जाय और ऐसा ही अपवर्त्य भाज्य का दूसरा नाम है और अपवर्त्य ऐसे भाज्य को कहते हैं जिसमें भाजक का निःशेष भाग लग जाय ॥

जैसे १५ का ५ अपवर्तक है क्योंकि १५ में ५ का निःशेष भाग लग सक्ता है और इसी कारण २५ का भी ५ अपवर्तक है इसलिये १५ और २५ का ५ समापवर्तक हुआ ऐसे ही ८ और १२ का २ समापवर्तक है और उनका ४ भी समापवर्तक है और २ से ४ बड़ा है और ८ और १२ का २ और ४ के सिवाय और कोई अंक अपवर्तक नहीं है इस कारण ८ और १२ का ४

तम महत्तमापवर्त्तक हुआ॥

क्योंकि २ अ में अ, का निःशेष भाग लग सक्ता है और ३ अ, में भी अ, का निःशेष भाग लग सक्ता है इस कारण अ २ अ और ३ अ का अ समापवर्त्तक हुआ और २ अ और ३ अ का और कोई अपवर्त्तक नहीं है इसलिये उनका अ सम महत्तमापवर्त्तक हुआ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि एक राशि का अपवर्त्तक उसका एक गुणकरूप अवयव होता है इसलिये जो एक राशि के संपूर्ण गुणकरूप अवयव निकाल लिये जांय तो वे सब उस राशि के अपवर्त्तक होंगे और ऐसेही जो दूसरी राशि के भी अपवर्त्तक निकाल लिये जांय तो दोनों राशियों में जो समापवर्त्तक हैं वे एक बार देखने से ही मालूम हो जांयगे और उनका घात दोनों राशियों का सम महत्तमापवर्त्तक होगा॥

२६ प्र० ऐसे ही जो एक संख्या के गुणकरूप अवयव निकालने होते हैं तो हम उस में २, ३, ४, ५, ८, आदि अंकों का भाग लगाते हैं और जिस अंक का निःशेष भाग लगता है उस का भाग देके लब्धि में फिर जो किसी अंक का निःशेष भाग लगता है तो भाग देके लब्धि ले लेते हैं और इस लब्धि में भी यही क्रिया यहां तक करते हैं कि पिछली लब्धि में १ के सिवाय किसी और अंक का निःशेष भाग न लगे॥

जैसे १०८ के गुणकरूप अवयव निकालो तो हम देखते हैं कि १०८ में २ का तो निःशेष भाग लग ही नहीं सकता परन्तु ३ का निःशेष भाग लग जाता है॥

३	१	८	९
३		६	३
३		२	१
७			७
			१

∴ १८९ = ३×३×३×७

ऐसे ही २२४ के गुणक रूप अवयव निकालो

२	२	२	४
२	१	१	२
२		५	६
२		२	८
२		१	४
७			७
			१

∴ २२४ = २×२×२×२×२×७

पहिले उदाहरण में १८९ में २ का तो निःशेष भाग लगा ही नहीं पर उस में ३ का ३ बार निश्शेष भाग लगा और ४, ५, ६, इन में से किसी अंक का पिछली लब्धि में निःशेष भाग नहीं लगा तिस पीछे देखा तो ७ का निःशेष भाग लग गया ॥

दूसरे उदाहरण में २२४ में २ का ५ बार निश्शेष भाग लगा और फिर ७ का निःशेष भाग लग गया ॥

इसलिये १८९ के ३, ३, ३, और ७ गुणक रूप अवयव हैं और २२४ के २ २ २ २ २ और ७ गुणकरूप अवयव हैं इस कारण ७ दोनों संख्या का समापवर्तक है और वही ७, १८९ और २२४ का सम महत्तमापवर्तक है॥

३८५ और ३९६ का सम महत्तमापवर्तक निकालो॥

५	३	८	५
७		७	७
११		१	१
			१

$\therefore$ ३८५ = ५ × ७ × ११

२	३	९	६
२	१	९	८
३		९	९
३		३	३
११		१	१
			१

$\therefore$ ३९६ = २ × २ × ३ × ३ × ११

और क्योंकि ३८५ और ३९६ के गुणक रूप अवयवों में ११ सम गुणक रूप अवयव बड़ा है इस कारण उन संख्याओं का ११ सम महत्तमापवर्तक हुआ॥

अंक गणित में दो वा अधिक संख्याओं के अपवर्तनांक वा सम महत्तमापवर्तक निकालने की जो रीति लिखी है उसी रीति से बीज गणित में भी दो वा अधिक राशियों का सम महत्तमापवर्तक निकल सक्ता है॥

२० प्र० अभ्यास करने से बीजात्मक राशियों के गुणक रूप अवयव सहज में निकल आते हैं और जो एक पद की राशि हो तो उसके गुणक रूप अवयव सहज में निकल सक्ते हैं॥

जैसे २अ^{२}कग^{२} = २ अ अ क ग ग, ४अ^{३}क^{२}ग = २×२ अ अ अ क क ग. इस कारण २अ^{२}कग^{२} और ४अ^{३}क^{२}ग इनका सम महत्तमापवर्तक उनके २, अ, अ, क, ग, सब गुणक रूप अवयवों के घात २अ^{२}कग के तुल्य है॥

३अ^{४}य^{५}र और ६अ^{२}कय इनका सम महत्तमापवर्तक निकालो॥

३अ^{४}य^{५}र = ३ अ अ अ अ य य य य य र और।

६अ^{२}कय = २×३×अअकय, इनमें ३,अ,अ, य इन गुणक रूप अवयव हैं इसलिये ३×अअय वा ३अ^{२}य यही सम महत्तमापवर्तक हुआ॥

॥लघुतम समापवर्त्य॥

२१ प्र० परिभाषा जो एक राशि में दूसरी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो पहिली राशि को अपवर्त्य कहते हैं इस कारण जो एक राशि में दो वा अधिक राशियों का पृथक् २ निःशेष भाग लग जाय तो पूर्व राशि को उन राशियों का समापवर्त्य कहते हैं और ऐसे ही जो किसी और सब से छोटी राशि में उन राशियों का निश्शेष भाग लग जाय तो छोटी राशि को लघुतम समापवर्त्य॥

जैसे ५का १५ अपवर्त्य है क्योंकि १५ में ५का ३बार ठीक भाग लग जाता है और ३का भी १५ अपवर्त्य है क्योंकि उस में ३का ५ बार ठीक भाग लग जाता है इसलिये ५ और ३का १५ समापवर्त्य है ऐसे ही ५ और ३के ३० और ४५ भी समापवर्त्य हैं परंतु उन सब अपवर्त्यों में १५ सब से छोटा है इसलिये ५ और ३का १५ लघुतम समापवर्त्य हुआ

२ अ क, अ का अपवर्त्य है क्योंकि २ अ क में अ २क बार जा सकता है और २अ क, क का भी अपवर्त्य है क्योंकि २ अ क में क, २अ बार जा सकता है इसलिये अ और क का २अ क समापवर्त्य है परंतु इस को अ और क का लघुतम समापवर्त्य इसलिये नहीं कहते कि अ और क का अ क भी सम लघुतमापवर्त्य है और यह २अ क से छोटा है इस कारण अ और क का अ क लघुतम समापवर्त्य है॥

ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि जब एक राशि दूसरी राशि का अपवर्त्य हो तो दूसरी राशि अपवर्त्य का एक गुणक रूप अवयव होगी और जो दो वा अधिक राशियों की एक राशि अपवर्त्य हो तो हर एक राशि अपवर्त्य का गुणक रूप अवयव होगी इस से यह बात निकलती है कि इष्ट राशियों का घात उन का समापवर्त्य होगा परंतु यह उन राशियों का सम लघुतमापवर्त्य हो वा न हो॥

जैसे २, ४, ६, का २×४×६ वा ४८ घात समापवर्त्य है परंतु २, ४, और ६ का लघुतम समापवर्त्य १२ है॥

१२ प्र० इस लिये जो दो वा अधिक राशियों का लघुतम समापवर्त्य ढूंढना हो तो हर एक राशि के गुणक रूप अवयव

निकालकर एक ऐसी राशि बनाओ कि जिसमें प्रत्येक राशि के भिन्न गुणक रूप अवयव सब आ जांय और किसी राशि में कोई गुणक रूप अवयव दो वा अधिक बार आया हो तो उसे जो राशि बनाओ उसमें उतने ही बार रक्खो तो इस रीति से जो राशि बनेगी वह सब राशियों का लघुतम समापवर्त्य होगी॥

जैसे ३, १० और ६ इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो ३=३×१, १०=२×५, ६=२×३

इसलिये ३, १, २, ५ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं और किसी संख्या में एक गुणकरूप अवयव दो वा अधिक बार नहीं आया इसकारण ३×१×२×५=३० यह लघुतम समापवर्त्य हुआ॥

२ उ० ८, १६, १० और २० इन का लघुतम समापवर्त्य निकालो॥

८=२×२×२, १६=२×२×२×२, १०=२×५ और २०=२×२×५ इन में २ और ५ भिन्न गुणकरूप अवयव हैं परन्तु एक संख्या में २, ४ बार आया है इसकारण २×२×२×२×५=८० यही लघुतम समापवर्त्य हुआ॥

३ उ० २अ, ६अक और ८अक इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो॥

२अ=२×अ, ६अक=२×३×अक, ८अक=२×२×२अक इन में २, ३ अ और क ये भिन्न गुणक रूप अवयव हैं॥

और एक राशि में २, ३ बार आया है इसकारण २×२

×२×३×पक = २४अक यह लघुतम समापवर्त्य हुआ ॥

४ उ॰ ८अ^{2}, १२अ^{3} और २०अ^{4} इनका लघुतम समापवर्त्य निकालो ॥

८अ^{2} = २×२×२ × अअ १२अ^{3} = २×२×३ अअअ
२०अ^{4} = २×२×५ अअअअ इन में २, ३, ५ और अ भिन्न गुणक रूप अवयव हैं और २, ३, बार एक राशि में आया है और अ ४ बार इस कारण २×२×२×३×५ अअअअ = १२०अ^{4} यह लघुतम समापवर्त्य हुआ ॥

७ ॥अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) १२८ और ८४ का सम महत्तमापवर्त्तक निकालो ॥
(२) २२५ और ९०० का
(३) ८०, १०० और १४० का
(४) अप और कप का
(५) कय^{2} और क^{2}प^{3} इनका
(६) अप^{2}य और अ^{2}पय इनका
(७) ५अ^{2}कप और २०अपकयर का
(८) १५अ^{6}क^{2} और २५अ^{2}क^{6} का
(९) ८अ^{4}क^{2}ग^{6} और २७अ^{6}क^{3}ग^{9} का
(१०) १४म^{2}नप^{3} और ७मनप इनका
(११) अकपर और २अगयर का
(१२) $\frac{४}{५}$अ^{2} और $\frac{२}{५}$अक इनका ॥
(१३) अकघ और अगघ और कगघ का॥
(१४) पयर, य^{2}र^{2} और अपय का ॥
(१५) २१ और २४ का लघुतम समापवर्त्य निकालो ॥
(१६) १२, १६ और २० का ॥

(१७) ४, ७, ८ और १७ का॥

(१८) ४, ७, १४, २१ और २८ का॥

(१९) १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ९ का

(२०) २१, २२, २३, और २४ का॥

(२१) अ घं और क य इन का॥

(२२) अ य और २ य र का॥

(२३) २ य, ६ य और ८ य का॥

(२४) अ क अ ग और क ग का॥

(२५) $य^२$, $र^२$ और २ य र इन का॥

(२६) क घ, $ग घ^२$, ग घ और क ग का॥

॥ भिन्न ॥

भिन्न शब्द का जो अर्थ अंक गणित में है वही बीज गणित में भी है जैसे $\frac{अ}{क}$ इसका यह अर्थ है कि एक बार संपूर्ण राशि के क तुल्य खण्ड हुए हैं और उन में से अ के समान खंड लिये गये हैं अ अंश है और क हर, अ और क राशियों के स्थान में चाहो जो संख्या मान लो॥

३३ प्र० अब इस बात को दिखाते हैं कि $\frac{अ}{क}$ अ के कवें भाग की तुल्य है भिन्न की परिभाषा के अनुसार $\frac{१}{क}$ इसका यह अर्थ है कि १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और उन में से अ खण्ड लिये हैं जब कि १ के ऐसे खंड भये हैं तो यह स्पष्ट दिखाई देता है कि प्रत्येक खण्ड १ का कवां भाग है और $\frac{अ}{क}$ से यह अर्थ है कि ऐसे अ भाग लिये हैं अर्थात १ के कवां भाग को अ बार लिया है वा १ के कवां भाग को १+१+१ आदि अ तक लिया है और १+१+१+ आदि अ के तुल्य है इस लिये $\frac{अ}{क}$ अ के कवें भाग के तुल्य है॥

३४ प्र० जो किसी भिन्न के अंश और हर दोनों एक राशि से गुणे जाय तो भिन्न के मोल वा मान में कुछ अन्तर नहीं पड़ता ॥ जैसे $\frac{अ}{क} = \frac{२अ}{२क} = \frac{३अ}{३क} = \frac{नअ}{नक}$ क्योंकि $\frac{२अ}{२क}$ इस का यह अर्थ है कि १ के २क तुल्य खंड हुए हैं और उन में से २अ भाग लिये हैं जो एक के २क तुल्य खंड किये जांय और १ ही के क तुल्य खण्ड किये जांय तो पहिला प्रत्येक खण्ड दूसरे प्रत्येक खण्ड से दूना होगा इसलिये पहिले प्रकार के जो खण्ड २अ लिये जावें और दूसरे प्रकार के अ खंड लिये जावें तो इन खण्डों की संख्या तुल्य होगी ॥

इस कारण $\frac{अ}{क} = \frac{२अ}{२क}$

इसी रीति से यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि $\frac{अ}{क} = \frac{३अ}{३क} = \frac{नअ}{नक}$ यहां न के स्थान में चाहो जो संख्या मान लो ॥

$\frac{नअ}{नक}$ में एक के नक तुल्य खंड हुए हैं और $\frac{अ}{क}$ में १ के क तुल्य खंड हुए हैं इसलिये $\frac{नअ}{नक}$ का प्रत्येक खंड $\frac{अ}{क}$ के प्रत्येक खंड का $\frac{१}{न}$ भाग है क्योंकि जब एक ही संख्या में किसी बड़ी संख्या का भाग दिया जाय और उसी संख्या में किसी छोटी संख्या का भाग दिया जाय तो पहिली लब्धि दूसरी लब्धि से छोटी होगी इस कारण १ के नक भाग को नअ बार लें तो $\frac{नअ}{नक}$, $\frac{अ}{क}$ के तुल्य हो ॥

(३५) प्र० क्योंकि $\frac{नअ}{नक} = \frac{अ}{क}$ इस्से यह बात निकलती है कि प्रत्येक भिन्न के अंश और हर दोनों में एक ही राशि का भाग दिया जाय तो भिन्न का मान ज्यों का त्यों ही बना रहता है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{अ}{क} = \frac{अ \times ग}{क \times ग} = \frac{अग}{कग}$ । (२) $\frac{अ}{क} = \frac{अ \times घचज, घच}{क \times घचज, घच}$

(३) $\frac{अ - य}{य} = \frac{२अ - २य}{२य}$ (४) $\frac{अ - य}{य} = \frac{अ^{२} - अय}{अय}$

(५) $\frac{१ - य}{१ + य} = \frac{२ - २य}{२ + २य}$ (६) $\frac{३अ - क}{२अ - ३क} = \frac{३अक - क^{२}}{२अक - ३क^{२}}$

(७) $३६अ = \frac{३६अ}{१} = \frac{२५२अ}{७}$ (८) $\frac{अय - य^{२}}{२अय} = \frac{अ - य}{२अ}$

(९) $\frac{२अय - २य^{२}}{२अय} = \frac{अ - य}{अ}$ (१०) $\frac{अ^{२} + अक}{अ^{२} - अक} = \frac{अ + क}{अ - क}$

(११) $\frac{२अ^{२}क - ३अक^{२}}{७अकग} = \frac{२अ - ३क}{७ग}$

(१२) $\frac{अय - २अय^{२}}{३अय} = \frac{१ - २य}{३}$

ऊपर जो रीति लिखी है उस्से भिन्नों का लघुतम वा छोटा रूप हो जाता है क्योंकि जब एक भिन्न के अंश और हर दोनों में किसी राशि का निःशेष भाग लग जाय तो उन दोनों में उस राशि का भाग देने से भिन्न का स्वरूप लघुतम हो जायगा और उसके मान में कुछ अंतर न पड़ेगा इसके उदाहरण लिखते हैं॥

॥८ अभ्यास के लिये उदाहरण॥

(१) $\frac{२अय}{३य}$ का लघुतम रूप करो॥

(२) $\frac{४अकग}{२अग}$ का तथा ॥

(३) $\frac{२० अ क प}{२५ अ}$ का तथा

(४) $\frac{३ अ क य^२}{६ अ य}$ का तथा

(५) $\frac{७५ अ य^२ र^३}{१५ अ^२ र^३}$ का तथा

(६) $\frac{अ^२ क य}{२ अ क^२ य^२}$ का तथा

(७) $\frac{म य - न य}{म न य}$ का तथा

(८) $\frac{२ य^२ - ३ य}{५ य}$ का तथा

(९) $\frac{१४ अ य^३ + २१ अ य^२}{७ अ य^२ क}$ का तथा

(१०) $\frac{४ क ग + २ ग}{२ अ ग}$ का तथा

(११) $\frac{२ अ य - २ य^२}{२ अ य - ३ य^२}$ का तथा

(१२) $\frac{न न य म^२ प + म प^२}{न^२ प - प न प + म प^२}$

॥भिन्नों के जोड़ने और घटाने की रीति॥

॥३६ प्र० दो वा अधिक भिन्नों के जोड़ने की रीति॥

प्रथम जो सब भिन्नों के एक ही हर हों तो उन के अंशों को जोड़ के योग के तले वही हर रखदो॥

जैसे $\frac{१}{४}+\frac{२}{४}=\frac{३}{४}$ वैसे ही $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{क}=\frac{अ+ग}{क}$ ॥

क्योंकि $\frac{अ}{क}$ और $\frac{ग}{क}$ हर एक भिन्न में १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और वैसे अ और ग खंड लिये गये हैं इसलिये वैसे अ और ग खंडों का योग $\frac{अ+ग}{क}$ के तुल्य है इसका यह अर्थ है कि १ के क तुल्य खंड किये गये हैं और वैसे अ और ग खंड लिये गये हैं इस रीति से $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{क}+\frac{घ}{क}=\frac{अ+ग+घ}{क}$ और ऐसे ही चार वा अधिक भिन्नों का योग हो सक्ता है ॥

दूसरे जो भिन्नों के हर एक से न हों तो उन के स्थान में ऐसे भिन्न रक्खो कि उन के मान में तो अंतर न हो और उन के हर एक से हों यह बात ३४ प्रक्रम के अनुसार हो सक्ती है, जैसे $\frac{अ}{क}$ और $\frac{ग}{घ}$ इन दोनों भिन्नों का जिन के हर जुदे हैं योग करो ॥

३४ प्र० के अनुसार $\frac{अ}{क}=\frac{अघ}{कघ}$ और $\frac{ग}{घ}=\frac{कग}{कघ}$ इस कारण $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{घ}=\frac{अघ}{कघ}+\frac{कग}{कघ}=\frac{अघ+कग}{कघ}$ पहिली रीति के अनुसार ॥

$\frac{अ}{क},\frac{ग}{घ},\frac{च}{ज}$ इन भिन्नों का योग करो ॥

$\frac{अ}{क}=\frac{अ घ ज}{क घ ज}$, $\frac{ग}{घ}=\frac{ग\times कज}{घ\times कज}=\frac{क ग ज}{क घ ज}$ क्योंकि ॥

५ प्रक्रम के अनुसार ग × क = कग और घ × क = कघ और ऐसे ही $\frac{च}{ज}=\frac{क घ\times च}{क घ\times ज}=\frac{क घ च}{क घ ज}$ इस कारण $\frac{अ}{क}+\frac{ग}{घ}+\frac{च}{ज}=$

$\frac{अघज}{कघज}+\frac{क ग ज}{क घ ज}+\frac{क घ च}{क घ ज}=\frac{अघज+कगज+कघच}{क घ ज}$

इसी रीति से चार वा अधिक भिन्नों का योग हो सक्ता है॥

भिन्नों के जोड़ने की जो रीति अंकगणित में लिखी है वह ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से निकलती है॥

॥ रीति ॥

प्रत्येक भिन्न के अंश को अपना हर छोड़ औरों के हरों से गुणदो इन घातों का योग इष्ट योग का अंश होगा और सब भिन्नों के हरों का घात इष्ट योग का हर होगा॥

३७ प्र० एक भिन्न में से दूसरे भिन्न के घटाने की रीति जो ड़ने में जो क्रिया करनी पड़ती है वही क्रिया घटाने में भी करते हैं केवल इतना अंतर है कि एक भिन्न के अंश को दूसरे भिन्न के अंश में से घटा देते हैं॥

जैसे $\frac{अ}{क} - \frac{ग}{क} = \frac{अ - ग}{क}$ और $\frac{अ}{क} - \frac{ग}{घ} = \frac{अघ - कग}{क घ}$

जो किसी राशि को भिन्न के स्वरूप में लाना चाहें तो उस के नीचे १ हर लिख दो जैसे $अ = \frac{अ}{१}$, $प = \frac{प}{१}$ $अ - क = \frac{अ - क}{१}$ आदि। इसका यह कारण है कि ३४ प्रनाम के अनुसार $अ = \frac{अ \times १}{१} = \frac{अ}{१}$ ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{अ}{य}$, $\frac{क}{य}$, और $\frac{ग}{य}$ इनका योग करो इन सबों के एक से हर हैं इस कारण $\frac{अ + क + ग}{य}$ योग हुआ॥

(२) $\frac{अ}{य}$ और $\frac{क}{२य}$ इनका योग करो इन भिन्नों के हर जुदे हैं परन्तु $\frac{अ}{य} = \frac{२अ}{२य}$ इसलिये $\frac{२अ}{२य} + \frac{क}{२य} = \frac{२अ + क}{२य}$ यही योग हुआ

(३) $\frac{१}{२}$ और $\frac{य}{२अ}$ इन का योग करो

$\frac{१}{२} = \frac{अ}{२अ}$, ∴ योग $= \frac{अ}{२अ} + \frac{य}{२अ} = \frac{अ+य}{२अ}$

(४) $\frac{य}{२}$, $\frac{य}{३}$ और $\frac{य}{४}$ इनका योग करो॥

$\frac{य}{२} = \frac{३\times४\times य}{३\times४\times२} = \frac{१२य}{२४}$; $\frac{य}{३} = \frac{२\times४\times य}{२\times४\times३} = \frac{८य}{२४}$

और $\frac{य}{४} = \frac{२\times३\times य}{२\times३\times४} = \frac{६य}{२४}$ ∴ योग $= \frac{१२य}{२४} + \frac{८य}{२४} +$

$\frac{६य}{२४} = \frac{२६य}{२४}$॥

(५) $\frac{१}{य}$, $\frac{१}{२य}$ और $\frac{१}{३य}$ इन का योग करो॥

$\frac{१}{य} = \frac{१\times२य\times३य}{य\times२य\times३य} = \frac{६य^२}{६य^३}$; $\frac{१}{२य} = \frac{१\times य\times३य}{२य\times य\times३य} =$

$\frac{३य^२}{६य^३}$ और $\frac{१}{३य} = \frac{१\times य\times२य}{३य\times य\times२य} = \frac{२य^२}{६य^३}$॥

इसलिये योग $= \frac{६य^२}{६य^३} + \frac{३य^२}{६य^३} + \frac{२य^२}{६य^३} = \frac{११य^२}{६य^३}$

इसका लघुतम रूप ३५ प्र० के अनुसार $\frac{११}{६य}$ यह हुआ॥

इस उदाहरण को जोड़ने की रीति के अनुसार किया परन्तु इस में बहुत क्रिया करनी पड़ी इसलिये हम इस उदाहरण को इस रीति से करते हैं कि प्रत्येक भिन्न का ६य हर ऐसी रीति से रक्खो कि उन के मान में अंतर न पड़े॥

$\frac{१}{य} = \frac{६ \times १}{६ \times य} = \frac{६}{६य}$, $\frac{१}{२य} = \frac{३ \times १}{३ \times २य} = \frac{३}{६य}$, $\frac{१}{३य} = \frac{२ \times १}{२ \times ३य} = \frac{२}{६य}$ ∴ योग $= \frac{६+३+२}{६य} = \frac{११}{६य}$ यही उत्तर पहिले भी आया था हरों के लघुतम समापवर्त्य में प्रत्येक भिन्न के हर का भाग निश्शेष लग सक्ता है इस लिये इन लब्धियों से अपने २ अंश और हर को गुणा करो तो भिन्नों के समच्छेद लघुतम रूप में होजांयगे ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{य}{२}$, $\frac{य}{३}$ और $\frac{य}{४}$ इन का योग करो॥

हरों का लघुतम समापवर्त्य १२ है जिस में २, ६ बार जा सक्ता है ३, ४ बार और ४, ३ बार इसलिये प्रत्येक भिन्न के अंश और हर को ६, ४ और ३ से जुदा जुदा गुणा $\frac{य}{२} = \frac{६य}{१२}$, $\frac{य}{३} = \frac{४य}{१२}$, $\frac{य}{४} = \frac{३य}{१२}$ ∴ योग =

$$\frac{६य}{१२} + \frac{४य}{१२} + \frac{३य}{१२} = \frac{१३य}{१२}$$ ॥

(२) $\frac{७य}{६}$, $\frac{३य}{५}$ और $\frac{य}{३०}$ इनका योग करो॥

इनके हरों का लघुतम रूप समच्छेद ३० है॥

$\frac{७य}{६} = \frac{३५य}{३०}$, $\frac{३य}{५} = \frac{१८य}{३०}$ ॥

∴ योग $= \frac{३५य + १८य + य}{३०} = \frac{५४य}{३०} = \frac{९य}{५}$ ॥

(३) $\frac{य}{२अ}$, $\frac{य}{६अक}$ और $\frac{य}{८अक}$ इन का योग करो॥

इन के हरों का लघुतम रूप समच्छेद २४अक है

और यह १२ अक्षम के तीसरे उदाहरण में लिखा है और २४ अक में २ अ, १२ क बार जा सक्ता है और ६ अक, ४ बार और ८ अक, ३ बार ∴ $\frac{य}{२अ} = \frac{१२कय}{२४अक}$

, $\frac{य}{६अक} = \frac{४य}{२४अक}$, $\frac{य}{८अक} = \frac{३य}{२४अक}$,

$$\therefore योग = \frac{१२कय+४य+३य}{२४अक} = \frac{१२कय+७य}{२४अक}$$

(४) $\frac{२अ}{७क}$ को $\frac{९अ}{७क}$ में से घटाओ

$$\frac{९अ}{७क} - \frac{२अ}{७क} = \frac{९अ-२अ}{७क} = \frac{७अ}{७क} = \frac{अ}{क} \text{ ॥}$$

(५) $\frac{३य}{२४र}$ को $\frac{३य}{४र}$ में से घटाओ, $\frac{३य}{४र} = \frac{६\times३य}{६\times४र} =$ $\frac{१८य}{२४र}$ ∴ अंतर $= \frac{१८य}{२४र} - \frac{३य}{२४र} = \frac{१५य}{२४र} = \frac{५य}{८र}$ ॥

(६) $\frac{५अक}{४}$ में से $\frac{७अक}{६}$ को घटाओ इन भिन्नों के हरों का १२ लघुतम रूप समच्छेद है $\frac{५अक}{४} = \frac{१५अक}{१२}$ और $\frac{७अक}{६} = \frac{१४अक}{१२}$ ∴ अंतर $= \frac{१५अक}{१२} -$ $\frac{१४अक}{१२} = \frac{अक}{१२}$ ॥

॥ ९ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

(१) $\frac{य}{५}$, $\frac{२य}{५}$ और $\frac{३य}{५}$ इनका योग करो

(२) $\frac{२अक}{३}$ और $\frac{अक}{६}$ तथा ॥

(३) $\frac{\text{२अ}}{\text{३}}$, $\frac{\text{अ}}{\text{३}}$ और $\frac{\text{२}}{\text{३}}$ तथा ॥

(४) $\frac{\text{अ}+\text{य}}{\text{५}}$ और $\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{५}}$ इन का योग करो ॥

(५) $\frac{\text{२य}+\text{२}}{\text{७}}$ और $\frac{\text{४य}-\text{५}}{\text{७}}$ तथा ॥

(६) $\frac{\text{२य}+\text{२}}{\text{७}}$ और $\frac{\text{४य}-\text{५}}{\text{२२}}$ तथा ॥

(७) $\frac{\text{२}}{\text{अ}}$, $\frac{\text{१}}{\text{अ}}$ और $\frac{\text{३}}{\text{अ}}$ तथा ॥

(८) $\frac{\text{१}}{\text{अक}}$, $\frac{\text{२}}{\text{अक}}$ और $\frac{\text{३}}{\text{अक}}$ तथा ॥

(९) $\frac{\text{२}}{\text{यर}}$, $\frac{\text{२}}{\text{पर}}$ और $\frac{\text{१}}{\text{रर}}$ तथा ॥

(१०) $\frac{\text{१}}{\text{अ}}$, $\frac{\text{२}}{\text{अक}}$, $\frac{\text{३}}{\text{अकग}}$ तथा

(११) प, $\frac{\text{३य}-\text{५}}{\text{३}}$ और $\frac{\text{२य}-\text{४}}{\text{२}}$ तथा

(१२) $\frac{\text{य}}{\text{६}}$, $\frac{\text{७य}-\text{६}}{\text{३}}$ और $\frac{\text{४य}+\text{१}}{\text{१२}}$ तथा ॥

(१३) $\frac{\text{८य}-\text{५}}{\text{१०}}$, $\frac{\text{प}}{\text{५}}$ और $\frac{\text{७य}+\text{६}}{\text{२५}}$ तथा ॥

(१४) $\frac{\text{३}}{\text{य}}$, $\frac{\text{१}}{\text{२य}}$ और $\frac{\text{३}}{\text{४य}}$ तथा ॥

(१५) $\frac{\text{३}}{\text{५र}}$, $\frac{\text{२}}{\text{३र}}$ और $\frac{\text{५}}{\text{६र}}$ तथा ॥

(१६) $\frac{य}{अ}$, $\frac{र}{क}$, $\frac{ल}{ग}$ तथा ॥

(१७) $\frac{यर - अक}{अक}$, $\frac{यर - कग}{कग}$ और २ तथा ॥

(१८) $\frac{अ-क}{अक}$, $\frac{क-ग}{कग}$ और $\frac{ग-अ}{अग}$ ॥

(१९) $\frac{४य}{५}$ को $\frac{९य}{१०}$ में से घटाओ ॥

(२०) $\frac{७य}{८}$ को य, में से घटाओ ॥

(२१) $\frac{५य+४}{९}$ को $\frac{१०य+१७}{१८}$ तथा ॥

(२२) $\frac{२य-३}{४}$ को $\frac{५य-१}{८}$ तथा ॥

(२३) $\frac{३र+य+१३}{१०}$ को $\frac{२य+र}{५}+१$ ॥

(२४) $\frac{१५+३य}{य+२}$ को $७+\frac{२४}{य+२}$ ॥

(२५) $\frac{३}{य}+\frac{४}{य}$ को $\frac{२}{य}+\frac{५}{य}$ तथा ॥

(२६) $\frac{य}{य+२}$ को $\frac{३य}{य+२}$ में से घटाओ ॥

(२७) $\frac{२य-७}{१२}$ को $\frac{३य+६}{१५}$ तथा

(२८) $\frac{य}{१०}+\frac{४}{२५}$ को $\frac{११य-१३}{२५}$ तथा ॥

(२९) $\frac{अ}{क+गय}$ को $\frac{अ}{क}$ तथा॥

(३०) $\frac{२य}{य+र}$ को $\frac{य+र}{र}$ तथा

(३१) $\frac{२}{२+य}$ को $\frac{३+२य}{१+७+२य}$

(३२) $\frac{य-र}{य+र}$ को $\frac{य+र}{य-र}$॥

॥भिन्नों के गुणा करने और भाग देने की रीति॥

। ३८ प्र॰ भिन्न को पूर्णांक से गुणा करने की रीति॥

भिन्न के अंश को पूर्णांक से गुणा करो और घात के नीचे भिन्न का हर रखदो। जैसे $ग \times \frac{अ}{क} = \frac{अग}{क}$ ॥

$\frac{अ}{क}$ और $\frac{अग}{क}$ इन दोनों भिन्नों ने १ के क तुल्य खंड किये हैं और $\frac{अ}{क}$ भिन्न में वैसे तुल्य खंड अ लिये हैं और $\frac{अग}{क}$ भिन्न में अ से तुल्य खंड ग बार लिये हैं इस कारण $\frac{अग}{क}$ भिन्न $\frac{अ}{क}$ भिन्न की अपेक्षा ग बार बड़ा है॥

॥उदाहरण॥

(१) $\frac{अ}{क}$ को २ से गुणा करो॥

घात = $\frac{२अ}{क}$ क्योंकि दो गुणा $\frac{अ}{क} = \frac{अ}{क} + \frac{अ}{क} = \frac{अ+अ}{क} = \frac{२अ}{क}$ ॥

(२) $\frac{अय}{कर}$ को म से गुणा करो॥ $म \times \frac{अय}{कर} = \frac{मअय}{कर}$

यही घात हुआ ॥

(३) $\frac{अ - य}{अ + य}$ को ७ से गुणा करो, घात $= ७ \times \frac{अ - य}{अ + य}$

$= \frac{७अ - ७य}{अ + य}$ ॥

(४) $\frac{अ - य}{क}$ को २अ से गुणा करो, घात $= २अ \times \frac{अ - य}{क}$

$= \frac{२अ^२ - २अय}{क}$ ॥

॥ ३९ प्र० भिन्न में पूर्णांक के भाग देने की रीति ॥

जो भिन्न के अंश में पूर्णांक का पूरा भाग लग जाय तो लब्धि के नीचे भिन्न के हर को रख दो वा भिन्न के हर को पूर्णांक से गुणा करो और इस घात को हर मान इसके ऊपर भिन्न का अंश लिखो, जैसे $\frac{अग}{क} \div ग = \frac{अ}{क}$ और $\frac{अ}{क} \div ग = \frac{अ}{कग}$ क्योंकि ३८ प्र० के अनुसार ग गुणा $\frac{अ}{क} = \frac{अग}{क}$ इसलिये $\frac{अग}{क}$ का ग वाँ भाग अर्थात् $\frac{अग}{क} \div ग = \frac{अ}{क}$ ॥

और क्योंकि ३४ प्रक्रम के अनुसार $\frac{अ}{क} = \frac{अग}{कग}$ और ३८ प्रक्रम के अनुसार $\frac{अग}{कग} =$ ग गुणा $\frac{अ}{कग}$ इस कारण $\frac{अ}{क}$ भी = ग गुणा $\frac{अ}{कग}$ और $\frac{अ}{क}$, $\frac{अ}{कग}$ की अपेक्षा ग गुणा बड़ा है इसलिये $\frac{अ}{क}$ का ग वाँ भाग वा $\frac{अ}{क} \div ग = \frac{अ}{कग}$ भाग देने की यही रीति लिखी है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{२अ}{क}$ में २का भाग दो, उत्तर $\frac{अ}{क}$, क्योंकि २अ ÷ २ = अ ॥

(२) $\frac{म अ य}{कर}$ में म, का भाग दो क्योंकि मअय ÷ म = अय ॥ ∴ लब्धि = $\frac{अ य}{क र}$ ॥

(३) $\frac{७अ - ७य}{अ + य}$ में ७ का भाग दो क्योंकि अंश ÷ ७ = अ - य

∴ लब्धि = $\frac{अ - य}{अ + य}$ ॥

(४) $\frac{२अक - २अ^२}{ग}$ में २अ का भाग दो ॥

क्योंकि २अक — २अ^२ में २अ का भाग दिया तो क — अ लब्धि हुई इसलिये लब्धि = $\frac{क - अ}{ग}$ ॥

१७० प्रक्रम एक भिन्न को दूसरे भिन्न से गुणा करने की रीति अंश को अंश से गुणा करो और हर को हर से ॥

जैसे $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अ ग}{क घ}$ ॥

$\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ}$ इसका यह अर्थ है कि $\frac{ग}{घ}$ को $\frac{अ}{क}$ वार गुणा करना है $\frac{ग}{घ}$ को अ गुणा किया तो $\frac{अ ग}{घ}$ लब्धि हुई परन्तु ३२ प्रक्रम के अनुसार $\frac{अ}{क}$ का अर्थ है अ का कवां भाग और $\frac{ग}{घ}$ को अ वार गुणा नहीं करना है परंतु उसे अ के कवें भाग वार गुणा करना है इसकारण $\frac{अ ग}{घ}$ का क, वां भाग अर्थात् $\frac{अ ग}{घ} ÷ क = \frac{अ ग}{क घ}$ ३९ प्रक्रम के अनुसार ॥

∴ $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अ ग}{क घ}$ यही रीति है ॥

अनुमान क्योंकि $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अग}{कघ}$ ॥

$\therefore \frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} \times \frac{च}{ज} = \frac{अग}{कघ} \times \frac{च}{ज} = \frac{अगच}{कघज}$ ॥

॥ इसी रीति से चार वा अधिक भिन्नों का गुणा हो सक्ता है

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{२}{अ}$ को $\frac{क}{ग}$ से गुणा करो उत्तर $\frac{२क}{अग}$ ॥

(२) $\frac{अ-य}{र}$ को $\frac{६}{य}$ से गुणा करो, $\frac{६}{य} \times \frac{अ-य}{र} = \frac{६अ-६य}{यर}$

(३) $\frac{२अ}{३र}$ को $\frac{क}{य}$ से गुणा करो, $\frac{२अ}{३र} \times \frac{क}{य} = \frac{२अ \times क}{३र \times य} = \frac{२अक}{३यर}$ ॥

(४) $\frac{य^२}{अ}$ को $\frac{य}{अ}$ से गुणा करो, घात $= \frac{य^२ \times य}{अ \times अ} = \frac{य^३}{अ^२}$ ॥

(५) $\frac{अक}{२यर}$ को $\frac{२अक}{५यर}$ से गुणा करो ॥

घात $= \frac{अक \times २अक}{२यर \times ५यर} = \frac{२अ^२क^२}{१०य^२र^२}$ ॥

पांचवें उदाहरण में जो उत्तर लिखा है उसका लघुतम रूप नहीं हुआ है क्योंकि उसके अंश और हर दोनों में २ का निःशेष भाग लग सक्ता है गुणा करने के पहिले हमें देखना चाहिये था कि इष्ट घात के अंश और हर दोनों का २ सम गुणक रूप अवयव है इस कारण उसे छोड़ देना चाहिये था क्योंकि भिन्न के अंश और हर दोनों

में एक राशि का भाग देने से भिन्न का मान बदलता नहीं ऐसे ही जो इष्ट घात के अंश और हर दोनों में जो एक से अधिक गुणक रूप अवयव हों तो उनको अंश और हर दोनों में से निकाल डालो इस्से घात का लघुलभ रूप हो जायगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(६) $\frac{२य}{३}$ को $\frac{३य}{५}$ से गुणा करो ॥

$\frac{२य}{३} \times \frac{३य}{५} = \frac{२य^२}{५}$ घात के अंश और हर दोनों के गुणक रूप अवयव ३ को निकाल डाला ॥

(७) $\frac{४य}{५}$ को $\frac{५य}{४}$ से गुणा करो ॥

घात $= \frac{४य \times ५य}{५ \times ४}$ इसके अंश और हर दोनों में ४ और ५ गुणक रूप अवयव हैं इस कारण उनको निकाल डाला तो अंश $=$ य $\times$ य $=$ य^२ और हर $= १ \times १ = १$ और घात $=$ $\frac{य^२}{१}$ वा य^२ परंतु इस घात को एक ही बार देखकर निकाल लेना चाहिये जैसे $\frac{४य}{५} \times \frac{५य}{४} = य^२$ ॥

(८) $\frac{२य - ५}{४}$ को ४ से गुणा करो, इस प्रश्न को देखते ही मालूम होता है कि घात $=$ २य $-$ ५ है क्योंकि किसी एक पदार्थ वा राशि की चौथाई को चौगुना करें तो घात संपूर्ण पदार्थ वा राशि के तुल्य होगा ॥

(९) $\frac{२य - ५}{४}$ को ८ से गुणा करो ॥

इस प्रश्न में २य $-$ ५ में ४ का भाग लगा है और जो राशि ८ में गुणी गई है इस लिये ४ का भाग देने

और ८ से गुणा करने के स्थान में २ य — ५ को २ से गुणा तो घात ४ य — १० के तुल्य हुआ ॥

(१०) $\frac{२य — ५}{१६}$ को ८० से गुणा करो ॥

$\frac{८०}{१६} = ५$ ∴ घात = ५ गुणा २य — ५ वा १०य — २५ ॥

(११) $\frac{अ + क}{अ}$ को $\frac{अ — क}{क}$ से गुणा करो ॥

घात = $\frac{अ + क}{अ} \times \frac{अ — क}{क}$ और अ + क को अ — क से गुणा तो $अ^{२} — क^{२}$ हुआ इस कारण घात = $\frac{अ^{२} — क^{२}}{अ क}$

॥ ४१ प्र० एक भिन्न में दूसरे भिन्न के भाग देने की रीति ॥

॥ रीति ॥

जो भिन्न भाजक हो उस को पलट दो अर्थात् उसके अंश के स्थान में हर रक्खो और हर के स्थान में अंश लिखो फिर भिन्न गुणन की रीति से दोनों भिन्नों का गुणा कर लो। जैसे $\frac{अ}{क} \div \frac{ग}{घ} = \frac{अ}{क} \times \frac{घ}{ग} = \frac{अ घ}{क ग}$ ॥

क्योंकि लब्धि एक ऐसी राशि होती है कि जो उसे भाजक से गुणा करें तो घात भाज्य के तुल्य होगा इस कारण जो भाज्य के ऐसे दो गुणक रूप अवयव कर लिये जांय कि उन में एक भाजक के तुल्य हो तो दूसरा गुणक रूप अवयव लब्धि के तुल्य होगा ऊपर जो उदाहरण लिखा है उसमें $\frac{अ}{क}$ भाज्य है और $\frac{अ}{क}$ बराबर $\frac{अ \times ग घ}{क \times ग घ} = \frac{अ ग घ}{क ग घ} =$

$\frac{ग अ घ}{घ क ग} = \frac{ग}{घ} \times \frac{अ घ}{क ग}$ इसमें $\frac{ग}{घ}$ गुणक रूप अवयव भाजक है इस कारण दूसरा गुणक रूप अवयव $\frac{अ घ}{क ग}$

लब्धि है ॥

॥उदाहरण॥

(१) $\frac{२}{य}$ में $\frac{३}{र}$ का भाग दो॥

$\frac{२}{य} \div \frac{३}{र} = \frac{२}{य} \times \frac{र}{३} = \frac{२र}{३य}$ ॥

(२) $\frac{अय}{कर}$ में $\frac{अ}{क}$ का भाग दो ॥

$\frac{अय}{कर} \div \frac{अ}{क} = \frac{अय}{कर} \times \frac{क}{अ} = \frac{अकय}{अकर} = \frac{य}{र}$ ३५ क्रम के अनुसार॥

(३) $\frac{२अक}{३पर}$ में $\frac{क}{य}$ का भाग दो ॥

$\frac{२अक}{३पर} \div \frac{क}{य} = \frac{२अक}{३पर} \times \frac{य}{क} = \frac{२अकय}{३कयर} =$

$\frac{२अकय}{३रकय} = \frac{२अ}{३र}$ ॥

(४) $\frac{२अ^२क}{१०प^२र^२}$ में $\frac{अक}{२पर}$ का भाग दो॥

$\frac{२अ^२क}{१०प^२र^२} \div \frac{अक}{२पर} = \frac{२अ^२क}{१०प^२र^२} \times \frac{२पर}{अक} =$

$\frac{२अ.अक.२पर}{५पर.२पर.अक} = \frac{२अ}{५पर}$ ॥

(५) $\frac{अ-य}{४}$ में २अ का भाग दो॥

$\frac{अ-य}{४} \div \frac{२}{अ} = \frac{अ-य}{४} \times \frac{अ}{२} = \frac{अ^२-अय}{८}$

(६) $\frac{अ^२-य^२}{अय}$ में $\frac{अ+य}{अ}$ का भाग दो॥

$\frac{अ^२ - य^२}{अय} \div \frac{अ+य}{अ} = \frac{अ^२ - य^२}{अय} \times \frac{अ}{अ+य} = \frac{अ - य}{य}$

$\frac{अ+य}{अय} \cdot \frac{अ}{अ+य} = \frac{अ - य}{य}$ ॥

(७) $\frac{१+य^२+२य}{३य}$ में $\frac{१+य}{२य}$ को भाग दो॥

लब्धि $= \frac{१+य^२+२य}{३य} \cdot \frac{२य}{१+य} = \frac{१+य}{३} \cdot \frac{१+य}{य} \cdot \frac{२य}{१+य} =$

$\frac{१+य}{३} \times २ = \frac{२+२य}{३}$ ॥

॥अभ्यास के लिये उदाहरण॥

(१) $\frac{य}{३}$ को ३ से गुणा करो॥ (९) $\frac{१२+८य}{१६}$ को ८० से॥

(२) $\frac{३य}{२}$ को २ से॥ (१०) $\frac{८-७य}{४\frac{१}{२}}$ को ९ से॥

(३) $\frac{५य}{४}$ को २ से॥ (११) $\frac{६य+१३}{१\frac{१}{४}}$ को १५ से॥

(४) $\frac{य}{३}$ को ६ से॥ (१२) $\frac{३य-१}{७\frac{१}{२}}$ को १५ से॥

(५) $\frac{अ-य}{२}$ को ४ से॥ (१३) $\frac{३य+४}{५\frac{१}{२}}$ को ११ से॥

(६) $\frac{७य}{१५}$ को ६० से॥ (१४) $\frac{य-१\frac{२}{३}}{२\frac{१}{३}}$ को ७ से

(७) $\frac{२य}{२१}$ को ८४ से॥ (१५) $\frac{२\frac{२}{३}-\frac{३}{४}य}{२\frac{१}{२}}$ को १० से॥

(८) $\frac{३य-५}{२}$ को ६ से॥

(१६) $\frac{३य}{२}$ को $\frac{१}{२}$ से ॥

(१७) $\frac{३य}{२}$ को $\frac{२य}{३}$ से ॥

(१८) $\frac{२-३य}{४}$ को $\frac{४}{५}$ से गुणा॰

(१९) $\frac{१}{२य}$ को $\frac{२}{य}$ से ॥

(२०) $\frac{य}{र}+\frac{र}{य}$ को $यर-\frac{१}{यर}$ से

(२१) $\frac{५य}{२}$ में ५ का भाग दो ॥

(२२) $\frac{३य}{४}$ में ५ का भाग दो

(२३) $\frac{३य}{४}$ में ६ का भाग दो

(२४) $\frac{२१अय}{४र}$ में ७अ का॰ ॥

(२५) $\frac{२मन}{प}$ में २म का॰ ॥

(२६) $\frac{२य-४यर}{र}$ में २य का ॥

(२७) $\frac{३अ+६अक}{४}$ में ३अ का॰

(२८) $\frac{५यर}{ल}$ में $\frac{२य}{र}$ का॰

(२९) $\frac{२अकग}{३घ}$ में $\frac{अग}{कघ}$ का॰

(३०) $\frac{अ^२यर}{२कग}$ में $-\frac{अर}{४य}$ का॰

(३१) $य+\frac{१}{य}$ को $य+\frac{१}{य}$ से गुणा करो

(३२) $\frac{य}{र}+य$ को $\frac{र}{य}+\frac{१}{य}$ से

(३३) $\frac{१}{१+य}+\frac{१}{१-य}$ को $\frac{१}{२}$ से ॥

(३४) $१-\frac{२अ}{१+अ}$ को $१+\frac{२अ}{१-अ}$ से ॥

(३५) $\frac{१}{२}+\frac{म-३}{२}$ को $\frac{१}{२}+\frac{म-२}{३}$ से

(३६) $\frac{अ}{क}+\frac{१}{२}-\frac{क}{अ}$ को $\frac{क}{अ}-\frac{१}{२}\cdot\frac{अ}{क}$ से

(३७) $\frac{अ^२-अय}{क}$ को $\frac{क^२}{अ-य}$ से गुणा करो ॥

(३८) $\frac{अ^२+अय+य^२}{अ^२-अय+य^२}$ को $\frac{अ-य}{अ+य}$ से ॥

(३९) $२+\frac{१}{म}$ में $१-\frac{१}{म}$ का भाग दो ॥

(४०) $\frac{२ — य}{२}$ में $\frac{य}{१ — य}$ का भाग दो॥

(४१) $\frac{क — ३ग}{२अव}$ में $\frac{२अक}{४अक}$ का॥

(४२) १ में $१ + \frac{य}{५ — य}$ का भाग दो॥

(४३) $\frac{१}{२}$ में $\frac{१}{२} — \frac{य}{२}$ का भाग दो॥

(४४) $\frac{१}{१+य}$ में $१ — \frac{१}{१+य}$ का भाग दो॥

(४५) अक में $\frac{क^२}{अ} — य$ का भाग दो॥

(४६) $\frac{अ^३ — य^३}{अ^२ + य^२}$ में $\frac{अ — य}{अ + य}$ का भाग दो॥

४२ प्र॰ जैसे एक संपूर्ण राशि के स्थान में एक अक्षर लिख देते हैं और उस पर जो क्रिया करनी होती है उस का चिन्ह उस अक्षर के साथ लगा देते हैं वैसे ही जब दो वा अधिक पद वा गुणक रूप अवयवों की राशि को एक संपूर्ण राशि मानते हैं तो उसे ऐसे एक कोष्ठ ( ), { }, [ ] के भीतर लिखते हैं और

जो उस संपूर्ण राशि पर क्रिया करनी होती है उसका चिन्ह कोष्ठ के साथ लगा देते हैं कोष्ठ शब्द का अर्थ कोठा है॥

जैसे अ + (क — ग) इस का अर्थ है कि क — ग को अ में जोड़ना है अ — (क — ग) इस का यह अर्थ है

कि क—ग को अ में से घटाना है अ×(क—ग) इसका अर्थ है कि क—ग को अ से गुणा करना है (क—ग) ÷ अ इसका अर्थ है कि क—ग में अ का भाग देना है

$(क-ग)^2$ इसका अर्थ है कि क—ग का वर्ग करना है

$\sqrt{(क-ग)}$ तथा क—ग का वर्गमूल लेना है॥

$(अक)^2$ तथा अ गुण क का वर्ग करना है॥

कोष्ठ के मिटाने से राशि का अर्थ पलट जाता है जैसे क—ग को अ बार गुणा करना हो तो अ×(क—ग) यों लिखेंगे और जो कोष्ठ न लिखें जैसे अ×क—ग तो यह अक—ग के तुल्य है और अ(क—ग) अक—अग के तुल्य है ऐसे ही क—ग का वर्ग लिखना हो तो $(क-ग)^2$ यों लिखेंगे और जो कोष्ठ न लिखें जैसे $क-ग^2$ तो इसका अर्थ है कि क में से ग का वर्ग घटाना है और $(क-ग)^2$ इसका अर्थ है कि क—ग राशि का वर्ग करना है और वह $क^2-2कग+ग^2$ के तुल्य है॥

४२ ५० कोष्ठ के स्थान में संपूर्ण पद वा गुणक रूप अवयवों के ऊपर एक ——— ऐसी सीधी रेखा कर देते हैं और उसे शृंखल कहते हैं शृंखल शब्द का अर्थ सांकल वा जंजीर है॥

जैसे $अ-\overline{क-ग}$ इसका वही अर्थ है जो अ—(क—ग) का है $\sqrt{\overline{क-ग}}$ इसका वही अर्थ है जो $\sqrt{(क-ग)}$ का है॥

$\overline{क-ग}^2$ तथा $(क-ग)^2$ का है॥

और यह बात भी याद रक्खो कि चिन्ह के अंश और

हर दोनों के बीच जो रेखा होती है उसे अंश और हर दोनों का शृंखल जानो॥

जैसे $\frac{\text{क}-\text{ग}}{\text{अ}}$ इसका वह अर्थ है जो $\overline{\text{क}-\text{ग}}\div\text{अ}$ का है व क—ग ÷ अ का है और $\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{ग}-\text{घ}}$ इसका भी वही जो $\overline{\text{अ}-\text{क}}\div\overline{\text{ग}-\text{घ}}$ वा (अ—क) ÷ (ग—घ) का अर्थ है॥

४५ प्र० कोष्ठ वा शृंखल के साथ जिस क्रिया का चिन्ह लगा हो जब तक वह क्रिया पूरी न हो जाय तब तक उस कोष्ठ वा शृंखल को मत मिटाओ॥

जैसे अ+(क—ग) यह कोष्ठ केवल इसी अर्थ से रक्खा है कि क—ग संपूर्ण राशि को अ में जोड़ना है और इसलिये इस क्रिया का चिन्ह कोष्ठ के बाईं ओर लगा है और जब दोनों राशि जुड़ जांय तब कोष्ठ का रखना कुछ अवश्य नहीं ऐसे ही अ—(क—ग) इस में कोष्ठ के पहिले जो — चिन्ह आया है उसका अर्थ है कि क—ग संपूर्ण राशि को अ में से घटाना है और जब वह उस में से घट जाय तब कोष्ठ को मिटा दो॥

॥पहिले उदाहरण की रीति॥

१८ प्रक्रम के अनुसार क—ग और अ इनका योग करना यही है कि उनको अपने २ चिन्ह सहित एक सीध में लिखदो जैसे अ+क—ग इसलिये जब योग के लिये कोष्ठ आवे वा उसके पहिले + चिन्ह हो तो कोष्ठ रखना कुछ अवश्य नहीं॥

१९ प्रक्रम के अनुसार जब एक राशि को दूसरी राशि में

से घटाते हैं तो जिस राशि को घटाते हैं उसके सब पदों के चिन्ह बदल देते हैं अर्थात् + के स्थान में − लिखते हैं और − के स्थान + चिन्ह रखते हैं और फिर जोड़ने की रीति से योग करते हैं जैसे क − ग को अ में से घटाना हो तो हम क − ग के स्थान में − क + ग रक्खेंगे और इसे अ में जोड़ देंगे जैसे अ − क + ग यह १६ प्रक्रम के अनुसार योग हुआ इसलिये जब कोष्ठ के पहिले − चिन्ह हो तो कोष्ठ के भीतर जो चिन्ह हों उन्हें बदल दो अर्थात् + के स्थान में − चिन्ह लिखो और − के स्थान में + चिन्ह रक्खो तिस पीछे कोष्ठ को मिटा दो॥

परंतु जब कोष्ठ के साथ गुणा, भाग, घात क्रिया और मूल क्रिया इनमें से कोई क्रिया साथ लगी है तो जब तक वह क्रिया पूरी न हो जाय तब तक कोष्ठ को दूर मत करो

॥दूसरी रीति के उदाहरण अंकों में लिखते हैं॥

जैसे ८ − (६ − ३) इसका यह अर्थ है कि ६ में ३ को घटाकर शेष को ८ में से घटाना है तो ६ − ३ = ३ ∴
८ − (६ − ३) = ८ − ३ = ५ यह उत्तर हुआ॥

कदाचित् कोष्ठ न करें और ८ − ६ − ३ ऐसे ही लिख दें तो इस का यह अर्थ है कि ८ में से ६ को घटाकर जो बाक़ी रहे उस में से ३ को घटाना है तो ८ − ६ = २ ∴
८ − ६ − ३ = २ − ३ = − १ यह उत्तर हुआ॥

इसलिये जो कोष्ठ को मिटाना हो तो उसके भीतर की राशियों के चिन्ह पलट दो। जैसे ८ − (६ − ३) = ८ − ६ + ३ = ५ यही उत्तर पहिले आया था॥

कोष्ठ से कभी दो अर्थ भी निकलते हैं जैसे अ − (अ − क)

वा $अ^2 - \overline{अ - क}^2$ इस कोष्ठ से एक तो यह अर्थ निकलता है कि अ − क संपूर्ण राशि का वर्ग करना है और दूसरा यह कि जब उसका वर्ग निकल आवे तो उस सम्पूर्ण वर्ग के पदों को $अ^2$ में से घटाना है और जब दोनों क्रिया हो जायं तब कोष्ठ को मिटा डालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) अ + (अ − क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ + (अ − क) = अ + अ − क पहिली रीति से
= २अ − क

(२) अ + क + (अ − क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ + क + (अ − क) = अ + क + अ − क पहिली रीतिसे = २अ

(३) अ − (अ − क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ − (अ − क) = अ − अ + क दूसरी रीति से
= क

(४) अ + क − (अ − क) इसका लघुतम रूप करो ॥

अ + क − (अ − क) = अ + क − अ + क दूसरी रीति के अनुसार = २क

(५) अग − $\overline{अ - क}$. ग इसका लघुतम रूप करो ॥

अग − $\overline{अ - क}$. ग = अग − $\overline{अग - कग}$
= अग − अग + कग दूसरी रीति के अनुसार = कग

(६) $\frac{अ}{क} - \frac{अ - क}{क}$ इसका लघुतम रूप करो

$\frac{अ}{क} - \frac{अ - क}{क} = \frac{अ - \overline{अ - क}}{क}$ २७ नं० के अनुसार

$= \frac{\text{अ} - \text{अ} + \text{क}}{\text{क}}$ दूसरी रीति के अनुसार

$= \frac{\text{क}}{\text{क}}$

$= १$

(७) $१ + \frac{\text{अ} + \text{य}}{\text{अ} - \text{य}}$ इसका लघुतम रूप करो॥

$१ + \frac{\text{अ} + \text{य}}{\text{अ} - \text{य}} = \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ} - \text{य}} + \frac{\text{अ} + \text{य}}{\text{अ} - \text{य}}$

$= \frac{\text{अ} - \text{य} + \overline{\text{अ} + \text{य}}}{\text{अ} - \text{य}}$ २६ प्रक्रम के अनुसार

$= \frac{\text{अ} - \text{य} + \text{अ} + \text{य}}{\text{अ} - \text{य}}$ पहिली रीति के अनुसार

$= \frac{२\text{अ}}{\text{अ} - \text{य}}$

(८) $१ - \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ} + \text{य}}$ इसका लघुतम रूप करो

$१ - \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ} + \text{य}} = \frac{\text{अ} + \text{य}}{\text{अ} + \text{य}} - \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ} + \text{य}}$

$= \frac{\text{अ} + \text{य} - \overline{\text{अ} - \text{य}}}{\text{अ} + \text{य}}$ २७ प्रक्रम के अनुसार

$= \frac{\text{अ} + \text{य} - \text{अ} + \text{य}}{\text{अ} + \text{य}}$ दूसरी रीति के अनुसार

$= \frac{२\text{य}}{\text{अ} + \text{य}}$

(९) $\text{अ} - \frac{\text{अ} - \text{क}}{२}$ इसको २ से गुणा करो॥

$२ \times \left(\text{अ} - \frac{\text{अ} - \text{क}}{२}\right) = २\text{अ} - २ \times \frac{\text{अ} - \text{क}}{२}$ गुणादो

गया इसलिये कोष्ठको दूर किया

$= \text{२अ} - \frac{\text{अ} - \text{क}}{\text{१}}$

$= \text{२अ} - \text{अ} + \text{क}$ दूसरी रीति के अनुसार

$= \text{अ} + \text{क}$

(१०) $\frac{\text{य}}{\text{२}} - \frac{\text{य} - \text{६}}{\text{५}}$ को १० से गुणा करो॥

घात $= \text{१०} \times \frac{\text{य}}{\text{२}} - \text{१०} \times \frac{\text{य} - \text{६}}{\text{५}}$ २२ प्रक्रम के अनुसार

$= \frac{\text{१०य}}{\text{२}} - \frac{\text{१०}(\text{य} - \text{६})}{\text{५}}$ ३८ प्रक्रम से

$= \text{५य} - \text{२}(\text{य} - \text{६})$

$= \text{५य} - (\text{२य} - \text{१२})$

$= \text{५य} - \text{२य} + \text{१२}$ दूसरी रीति से

$= \text{३य} + \text{१२}$

(११) $(\text{अ} + \text{क})^{\text{२}} - (\text{अ} - \text{क})^{\text{२}}$ इसका लघुतम रूप करो॥

$(\text{अ} + \text{क})^{\text{२}} - (\text{अ} - \text{क})^{\text{२}} = (\text{अ}^{\text{२}} + \text{२अक} + \text{क}^{\text{२}}) - (\text{अ}^{\text{२}} - \text{२अक} + \text{क}^{\text{२}})$

$= \text{अ}^{\text{२}} + \text{२अक} + \text{क}^{\text{२}} - \text{अ}^{\text{२}} + \text{२अक} - \text{क}^{\text{२}}$

पहिली और दूसरी रीति के अनुसार

$= \text{४अक}$

(१२) $\frac{\text{अ}^{\text{२}} - (\text{क} - \text{ग})^{\text{२}}}{(\text{अ} + \text{क})^{\text{२}} - \text{ग}^{\text{२}}}$ इसका लघुतम रूप करो॥

अंश $= (\overline{\text{अ} + \text{क}} - \text{ग})(\text{अ} - \overline{\text{क} - \text{ग}})$

$= (\overline{\text{अ} + \text{क}} - \text{ग})(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})$

हर $= (\text{अ} + \text{क} + \text{ग})(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})$

$= (\text{अ}+\text{क}+\text{ग})\ (\text{अ}+\text{क}-\text{ग})$

$\text{भिन्न} = \frac{(\text{अ}+\text{क}-\text{ग})}{(\text{अ}+\text{क}+\text{ग})}\ \frac{(\text{अ}-\text{क}+\text{ग})}{(\text{अ}+\text{क}-\text{ग})} = \frac{\text{अ}-\text{क}+\text{ग}}{\text{अ}+\text{क}+\text{ग}}$

॥उदाहरण॥

(१) अक अ(ग−क) इसका लघुतम रूप करो॥

(२) ४(१+य)+३य इसका लघुतम रूप करो॥

(३) ३(अ+य)−२(अ−य) इसका तथा॥

(४) ३(अ+क) (अ−क) तथा॥

(५) ५(१−य)+(१+५य)×२ तथा॥

(६) $\frac{\text{अ}-\text{य}}{२} - \frac{\text{य}-२\text{य}}{२}$ तथा॥

(७) $\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क}) - \frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})$ तथा॥

(८) $(\text{अ}+७)\text{य}^{२}+(\text{क}-७)\text{य}^{२}$ तथा॥

(९) २−(−४+५य) इसका लघुतम रूप करो॥

(१०) $१-१-\overline{१-\text{य}}$ तथा॥

(११) $(२\text{अ}-\overline{\text{क}+\text{ग}})-(\text{अ}-\overline{\text{क}-२\text{ग}})$ ॥

(१२) $\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{य})(२\text{अ}+\text{य})+\frac{१}{२}\text{य}(\text{अ}+\text{य})$

(१३) $(१+\text{य})(१-\text{य})(१+\text{य}^{२})$ ॥

(१४) $२\left(\text{य}^{२}-\frac{१}{४}\right)\div(२\text{य}+१)+\frac{१}{२}$ ॥

(१५) $\frac{१}{२}\left(\frac{अ}{क}+\frac{ग}{घ}\right)+\frac{१}{२}\left(\frac{अ}{क}-\frac{ग}{}\right)$ ॥

(१६) $\left\{\frac{अ(अ+क)+क^{३}}{अ}\right\} \div \left\{क(अ+क)-अ^{२}\right\}$ ॥

(१७) $४\times\left\{\frac{३}{८(१-य)}+\frac{१}{८(१+य)}\right\}$ ॥

(१८) $\frac{२य(२य-अ)}{(अ-२अ)^{२}}+\frac{अ}{अ-२य}$ ॥

(१९) $\frac{२}{३}(य+१)\left\{य+२-\frac{१}{२}(२य+१)\right\}$

(२०) $\left\{१-१-य|\right\}ग(२+य)$ ॥

॥एकवर्णसमीकरण॥

४५ प्र० जो हम कहैं कि २+३=५ वा २×{१+६} = १४ तो इन की [illegible]ता में हमें कुछ सन्देह नहीं है और इस का ऐसी समता में हम कुछ प्रश्न नहीं कर सक्ते॥ ऐसे ही

२य + ३य = ५य वा २(अ+य) = २अ+२य

इनकी समता में भी कुछ शंका नहीं है क्योंकि हम अच्छी रीति से जानते हैं कि य के स्थान में चाहे सो मान रक्खो परंतु २य+३य अवश्य ५य के तुल्य होगा इसमें कुछ सन्देह नहीं तो ऐसी समता को एकरूपता कहते हैं और जो हम कहैं कि य+४ = ६ वा २(१+य) = ७ ॥ तो ऐसी समता में य का एक नियत मान रखने से समता बनी रहैगी और ऐसी समता को समीकरण कहते हैं और ऐसे समीकरण में य अव्यक्त राशि का मान जिस क्रिया से निकलता है उसे उत्थकरण कहते हैं और जब अव्यक्त राशि के मान को उसके स्थान में रखकर समीकरण की तुल्यता दिखाते हैं तो उसको आलाप कहते हैं॥

$य + ४ = ६$ इस समीकरण में य का मान बताओ तो इस प्रश्न में हम देखते हैं कि य को ४ में जोड़ने से ६ होते हैं इस कारण अवश्य $य = २$ ॥

$२(१+य) = १४$ इस समीकरण में य का मान बताओ तो इस प्रश्न से हम देखते हैं कि दोगुणा $(१+य)$, १४ के तुल्य है इस कारण $१+य$ अवश्य ७ के तुल्य होगा और केवल य ६ के तुल्य होगा ॥

ऐसे प्रश्नों में अव्यक्त राशि का मान निकालना बहुत कठिन नहीं है परंतु बहुतेरे प्रश्न ऐसे होते हैं कि उन में अव्यक्त राशि बहुत दूलगी रहती है ऐसे प्रश्नों में अव्यक्त राशि का मान निकालने में बीज गणित का बड़ा प्रयोजन पड़ता है इस के अर्थ हम रीतें लिखते हैं और उन सब रीतों की सत्यता इस स्वयंसिद्ध परिभाषा से पाई जाती है ॥

जो तुल्य राशियों पर समान क्रिया की जाय तो उन के फल भी तुल्य होंगे ॥

(५६) प्र॰ जो = इस चिन्ह के दोनों ओर एक ही राशि हो और उस का चिन्ह भी एक सा हो जैसे + वा − हो तो ऐसी राशि को दोनों ओर से निकाल डालो और इस क्रिया को शोधन कहते हैं और हम जानते हैं कि जो तुल्य राशियों में से तुल्य राशि निकाली जाय तो शेष अवश्य तुल्य रहेंगे जैसे जो $य+४ = ७+४$ तो = इस चिन्ह के दोनो ओर +४ है उसे निकाल डाला तो $य$ ७ के तुल्य रह गया ॥

॥ रीति ॥

५७ प्र॰ समीकरण में जैसे एक पक्ष के किसी पद को दूसरे पक्ष में स्थापन करो तो उस के चिन्ह को बदल दो या जो उस का चिन्ह + हो तो उस को स्थान में − रक्खो और जो

– हो तो धन लिखो इस क्रिया को पक्षान्तरनयन क
ते हैं जैसे अय + क = गय – घ, यह एक समीकर
है इस के दोनों पक्षों की तुल्य राशियों में से गय को
टाया तो शेष भी तुल्य बचेंगे ॥ अर्थात्

अय — गय + क = गय – गय + घ

∴ अय – गय + क = घ ∵ गय – गय = ०

इस रीति से = चिन्ह के एक ओर से गय को उसका चि
ह पलट कर दूसरी ओर स्थापन कर दिया ॥
फिर हर एक पक्ष में से क को घटाया तो

अय – गय + क – क = घ – क

वा अय – गय = घ – क ∴ क – क = ०

अर्थात् क पद को एक पक्ष में से दूसरे पक्ष में उसका
चिन्ह पलट कर रख दिया ॥

॥ उदाहरण ॥

य + २ = ६ – य इस समीकरण के एक पक्ष में अक्षर
रक्खो और दूसरे पक्ष में अंक, तो – य के स्थान में + य
रक्खा और + २ के स्थान में – २ लिक्खा ॥

∴ य + य = ६ – २

(२) ४ य – ८ = ३ य – २ य + १२, इस समीकरण को
एक पक्ष में अक्षर रक्खो और दूसरे पक्ष में अङ्क ॥

४ य – ३ य + २ य = १२ + ८

॥ तीसरी रीति ॥

४८ प्र० जो एक समीकरण के प्रत्येक पद को एक ही
राशि से गुणा करते तो भी समीकरण समता नहीं छोड़ेगी

क्योंकि जब हम प्रत्येक पद को एक ही राशि से गुणा करते हैं तो हर एक पक्ष की सम्पूर्ण राशि का उस राशि से बराबर गुणा हो जाता है और इस लिये घात भी तुल्य होते हैं॥

इस रीति से समीकरण में जो भिन्न होते हैं उन के छेद दूर हो जाते हैं और इस क्रिया को छेदगम कहते हैं॥

जैसे $७य - ६ = \frac{५य}{३}$ इस समीकरण के प्रत्येक पद को ३ से गुणा तो $२१य - १८ = ५य$ क्योंकि $३ \times \frac{५य}{३} = ५य$॥

$\frac{य}{२} + ५ = \frac{य}{३} + ६$ इस समीकरण में जो पद भिन्न हैं उनके छेदों को दूर करो, समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो $य + १० = \frac{२य}{३} + १२$ इस समीकरण में अब एक भिन्न पद रह गया इस लिये उस के प्रत्येक पद को भिन्न पद के हर ३ से गुणा तो $३य + ३० = २य + ३६$ इस समीकरण में अब कोई पद भिन्न नहीं रहा॥

ऐसे ही जो दो से अधिक भिन्न पद हों तो उन के छेद क्रम से दूर हो सक्ते हैं॥

परन्तु जो भिन्नों के हर बड़े न हों तो उन सब के घात से समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो॥

जैसे $\frac{य}{२} + ५ = \frac{य}{३} + ६$ यह जो समीकरण लिखा है इस के प्रत्येक पद को २×३ वा ६ से एक बार ही गुणा किया तो $३य + ३० = २य + ३६$ क्योंकि $६ \times \frac{य}{२} = ३य$ और $६ \times \frac{य}{३} = २य$ ऐसे ही जो $\frac{य}{२} - \frac{२य}{३} + \frac{य}{५} = ६$ समीकरण है उस के प्रत्येक पद को $२ \times ३ \times ५$ वा ३० से गुणा तो $१५य - २०य + ६य = १८०$ क्योंकि $३० \times \frac{य}{२} = १५य$॥

$३० \times \frac{३य}{२} = ४५य$ औ $३० \times \frac{य}{५} = ६य$ ॥

परंतु जो प्रत्येक भिन्न पदों के हरों के घात से गुणा करने के स्थान में उनके लघु समावर्त्य अर्थात् उस छोटी संख्या से जिसमें प्रत्येक हर का निःशेष भाग लग जाय गुणा किया जाय तो सहज पड़ेगा॥

जैसे $\frac{य}{२} - \frac{य}{४} + \frac{य}{८} = ३$ इसमें हरों का घात ६४ है॥

परंतु उनका लघु समावर्त्य ८ है इसलिये छेदगम के लिये समीकरण के प्रत्येक पद को ८ से गुणा ॥ तो

$\therefore ८ \times \frac{य}{२} = ४य,\ ८ \times \frac{य}{४} = २य,\ ८ \times \frac{य}{८} = य$ ॥

$\therefore ४य - २य + य = २४$ इस समीकरण में अब हर दूर होगये॥

॥ चौथी रीति ॥

४८ प्र॰ जो समीकरण के प्रत्येक प्रत्येक पद में किसी राशि का भाग दिया जाय तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी॥

क्योंकि जब हम समीकरण के दोनों पक्षों की तुल्य संपूर्ण राशियों के प्रत्येक पद में एक राशि का भाग देते हैं तो उन संपूर्ण राशियों में उस राशि का भाग लग जाता है और इस कारण लब्धि तुल्य होती है॥

जैसे $४य - २य = १६$ इस समीकरण के प्रत्येक पद में २ का भाग दिया तो $२य - य = ८$

ऐसे ही जो $७य = २८$ इस समीकरण के प्रत्येक पद में ७ का भाग दिया तो $\frac{७य}{७} = \frac{२८}{७}$ वा $य = ४$ ॥

$अय = क$ इस समीकरण के प्रत्येक पद में अ का भाग दिया तो $\frac{अय}{अ} = \frac{क}{अ}$ वा $य = \frac{क}{अ}$ ॥

जब एक वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशि का एक घात हो जैसे य, और बड़ा घात न हो जैसे $य^२$, $य^३$ आदि तो ऊपर जो ४ रीति लिखी हैं उन से एक घात

एक वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आता है

॥ ५० प्र० ए क बात एक वर्ण समीकरण में॥
अव्यक्त राशि के जाने की
रीति

(१) जो समीकरण में भिन्न पद हों और उन में अव्यक्तराशि मिली हों तो उन के छेदों को तीसरी रीति से दूर करना ॥

(२) जो समीकरण में कोई राशि कोष्ठ वा शृंखल से घिरी हो तो कोष्ठको ४५ प्रक्रम के अनुसार मिटा-देना ॥

(३) दूसरी रीति से समीकरण के जिन पदों में अव्यक्त राशि मिली हों उन को = चिन्ह के एक ओर ले आओ और जिन पदों में अव्यक्त राशि न हो उन को = इस चिन्ह के दूसरी ओर रक्खो ॥

(४) जो सजातीय राशि हों तो उन का योग वा अन्तर जोड़ने वा घटाने की रीति से करलो ऐसी क्रिया करने से अव्यक्त राशि का केवल एक पद रह जायगा ॥

(५) उसके गुणका समीकरण के प्रत्येक पद में भाग देने से अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा ॥

और जो समीकरण के दोनों पक्षों में एक सी राशि हों और उन के चिन्ह भी एक से हों तो उनको पहिली रीति के अनुसार मिटा दो वा जो समीकरण के प्रत्येक पद में किसी एक राशि का निश्शेष भाग लग जाय तो भाग देके लब्धि लेलो ॥

॥उदाहरण॥

(१) $२य - ३ = \frac{य}{२} + ६$ इस समीकरण में य का मान बताओ॥

$\frac{य}{२}$ यह भिन्न है इसलिये समीकरण में कोई भिन्नरूप पद न रखने के लिये प्रत्येक पद को २ से गुणा॥ तो

$४य - ६ = य + १२ \because २ \times \frac{य}{२} = य$

पक्षान्तरानयन से

$४य - य = १२ + ६$

योग करने से

$३य = १८$

३ का भाग देने से

$य = \frac{१८}{३} = ६$ यही य अव्यक्त राशि का मान है इसकी सत्यता दिखाने के लिये इस समीकरण में य के स्थान में ६ रक्खा॥ तो

$२ \times ६ - ३ = \frac{६}{२} + ६$ वा $१२ - ३ = ३ + ६$ वा $९ = ९$ इससे जाना जाता है कि जो य ६ के तुल्य हो तो समीकरण भी शुद्ध है॥

(२) $\frac{य}{२} - ५ = \frac{य}{३} - ३$ तो य का मान बताओ॥

$\frac{य}{२}$ और $\frac{य}{३}$ ये दो भिन्न हैं इसलिये समीकरण में भिन्नरूप पद न रखने के लिये तीसरी रीति से २×३ वा ६ से समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा तो

$३य - ३० = २य - १८ \because ६ \frac{य}{२} = ३य$ और $६ \times \frac{य}{३} = २य$

पक्षान्तरानयन से $१य = ३० - १८$

भाग करने से य=१२ ∴ २य—२य=२य वा य

य का १२ मान शुद्ध है क्योंकि $\frac{१२}{२}$ — ५ = ६ — ५ = १

और $\frac{१२}{३}$ — ३ = ४ — ३ = १॥

(३) $\frac{य—६}{२}$ + ६ = $\frac{५य—६}{२}$, तो य का मान बताओ

२ से गुणा किया तो य — ६ + १२ = ५य — ६

— ६ मिटा दिया तो य + १२ = ५य

पक्षांतरानयन से १२ = ५य — य

योग करने से १२ = ४य

४ का भाग देने से ३ = य वा य = ३

(४) $\frac{य}{२}$ — $\frac{५य}{३}$ — $\frac{४}{३}$ = $\frac{४य}{३}$ — ३ तो य का मान बताओ॥

२×३ वा ६ से गुणा किया तो ३य — १०य — ८ = ८य — १८

पक्षांतरानयन से ३य — १०य — ८य = ८ — १८

योग करने से — १५य = — १०

— १५ का भाग देने से य = $\frac{—१०}{—१५}$ = $\frac{२}{३}$

(५) $\frac{य}{३}$ — $\frac{य}{२}$ + $\frac{य}{५}$ = $\frac{१}{२}$ तो य का मान निकालो

२×३×५ वा ३० से गुणा किया तो ∴ ३० × $\frac{य}{३}$ = १०य

३० × $\frac{य}{२}$ = १५य, ३० × $\frac{य}{५}$ = ६य और ३० × $\frac{१}{२}$ = १५

∴ १०य — १५य + ६य = १५

योग करने से य = १५

(६) $\frac{४य}{३} - \frac{२य}{१०} + \frac{य}{६} = ३९$ तो यका मान बताओ
३, १० और ६ इनका लघुतम समापवर्त्य ३० है॥
इसलिये हरों के दूर करने के लिये समीकरण के प्रत्येक पद को ३० से गुणा ॥तो

$$\therefore ३० \times \frac{४य}{३} = १० \times ४य = ४०य$$

$३० \times \left(-\frac{२य}{१०}\right) = -६य$, $३० \times \frac{य}{६} = ५य$ और $३० \times ३९ = ११७०$

$$\therefore ४०य - ६य + ५य = ११७०$$

योग करने से $३९य = ११७०$

३९ का भाग देने से $य = \frac{११७०}{३९} = ३०$

॥अभ्यास के लिये उदाहरण॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान बताओ

(१) $६य - १० = ५य - ४$ ॥
(२) $१३य + १ = ८य + ५$ ॥
(३) $३य + ३० = २ + ३६$ ॥
(४) $४य - २य = २४ - य$ ॥
(५) $७य - ११ + ५ = ८य - ९$ ॥
(६) $१५ - २य + ६ = ३य + १$ ॥
(७) $९य - ६ = १२ - ४य - ४$ ॥
(८) $१२ - ५य = १५ - ३य - ८$ ॥
(९) $२२१ = १४य + १ - ३य + १०$ ॥
(१०) $५०० = ३७य + २२ + ३२य - ८$ ॥
(११) $७य - २य + ५ = १३य - ४य - १५$ ॥
(१२) $११य - ६य + ४य = ३य + ७४$ ॥

(१३) $२य + \frac{१}{२} = ३य - \frac{१}{२}$ ॥

(१४) $२५य - ३\frac{१}{२} = २\frac{१}{२} + य$ ॥

(१५) $य + \frac{य}{२} = ६$ ॥

(१६) $२य - \frac{य}{२} = १८$ ॥

(१७) $३य + \frac{य}{३} = ४य - ६$ ॥

(१८) $\frac{४य}{३} + \frac{२}{३} = य + ३$ ॥

(१९) $\frac{३य}{५} - \frac{य}{५} = य - ६$ ॥

(२०) $\frac{य}{३} + \frac{य}{६} = १५$ ॥

(२१) $\frac{य}{५} - \frac{य}{१०} = \frac{१}{२}$ ॥

(२२) $य - \frac{य}{२} + \frac{य}{३} - \frac{२}{३} = ३\frac{१}{२}$ ॥

(२३) $\frac{२य}{७} + \frac{य}{६} - \frac{१}{६} = य - ४$ ॥

(२४) $\frac{३य}{७} - १ = \frac{य}{५} + \frac{३}{५}$ ॥

(२५) $\frac{य}{२} - \frac{य}{३} - \frac{य}{४} + \frac{१}{२} = \frac{३}{४}$ ॥

(२६) $\frac{३य}{२} - \frac{२य}{३} + \frac{१}{६} = \frac{य}{६} + ८\frac{५}{६}$ ॥

(२७) $\frac{य}{५} + \frac{य}{४} + \frac{य}{३} - \frac{य}{२} = ३७$ ॥

(२८) $य - \frac{य}{६} - \frac{य}{१२} - \frac{य}{७} = \frac{य}{२} + ९$ ॥

(२९) $\frac{३य}{१४} - \frac{२य}{२१} + \frac{१}{३} = \frac{य}{४} - ६\frac{१}{४}$ ॥

(३०) $\frac{३य}{७} - \frac{य}{४} - \frac{य}{६} = \frac{५}{२१} - \frac{३}{२८}$ ॥

(३१) $२य - \frac{२य}{५} - २\frac{१}{५} - \frac{४य}{११} = \frac{८य}{७} - १\frac{६}{११}$ ॥

(३२) $\frac{य}{८} + \frac{२य}{५} = \frac{७य}{१५} - \frac{य}{६०} + \frac{३}{२०}$ ॥

(३३) $\frac{७य}{८} - \frac{३य}{७} + १\frac{१}{८} = \frac{९य}{४} + \frac{९य}{१४} - २०\frac{२५}{२८}$ ॥

(३४) $\frac{३य}{१६} + \frac{७य}{१५} - \frac{७य}{२०} = २\frac{३९}{६०} - \frac{३}{१६}$ ॥

(३५) $\frac{१४य}{३} - \frac{८य}{५} = १०\frac{२}{३} + \frac{४य}{१\frac{२}{३}} - ३\frac{२}{५}$ ॥

(३६) $\frac{य}{४} - ४\frac{१}{२} + \frac{य}{५\frac{१}{२}} + \frac{य}{२} = \frac{१६\frac{१}{४}}{५\frac{१}{२}}$ ॥

५१ प्र० जो समीकरण में कोष्ठ वा शृंखल आवें तो वे ४४ प्रक्रम की रीतियों से दूर हो सक्ते हैं॥

॥उदाहरण॥

(१) $२(य+५)+३(२य-७)=२१$ तो य का मान बताओ॥

पहिले कोष्ठ का यह अर्थ है कि य+५, २ गुणा है और दूसरे कोष्ठ से मालूम होता है कि ३ गुणा २य−७ को जोड़ना है इसलिये गुणा करने के पीछे कोष्ठों को मिटा दिया॥ तो

$\therefore २(य+५)=२य+१०$ और $३(२य-७)=६य-२१$ ॥

$\therefore २य+१०+६य-२१=२१$ ॥

पक्षान्तरानयन से $२य + ६य = २२ + २१ - १०$

योगकरने से $८य = ३२$

८का भागदने से $य = \frac{३२}{८} = ४$ ॥

(२) $२(य+५) - ३(२य-७) = १५$ तो य का मान निकालो

$\therefore २(य+५) = २य+१०$ और $३(२य-७) = ६य-२१$ ॥

$\therefore २य+१० - (६य-२१) = १५$

वा ४४ प्रक्रम से $२य+१० - ६य + २१ = १५$ ॥

पक्षान्तरानयन से $२य - ६य = १५ - १० - २१$

योग करने से $-४य = -१६$ ॥

-४ का भाग देने से $य = \frac{-१६}{-४} = ४$

(३) $५ - \frac{य+४}{११} = य - ३य$ को मान कहो ॥

यह तो हम लिख ही चुके हैं कि जो रेखा भिन्न के अंश और हर के बीच में खिंची रहती है वह दोनों अंश और हर का शृंखल होती है समीकरण के प्रत्येक पद को ११ से गुणा करो ॥

$५५ - (य+४) = ११य - (३३$ तो ४४ प्रक्रम से

वा $५५ - य - ४ = ११य - ३३$

पक्षान्तरानयनसे $५५ - ४ + ३३ = ११य + य$

योग करने से $८४ = १२य$

१२ का भागदेनेसे $य = \frac{८४}{१२} = ७$

(४) $य + \frac{३य - ५}{२} = १२ - \frac{२य - ४}{३}$ तो य का मान बताओ ॥

छेदगम के लिये प्रत्येक पद को २ × ३ बा६से गुणा किया तो

$६य + ३(३य - ५) = ७२ - २(२य - ४)$

वा $६य + (९य - १५) = ७२ - (४य - ८)$

३४ प्रक्रम से $६य + ९य - १५ = ७२ - ४य + ८$

पक्षांतरानयन से $६य + ९य + ४य = ७२ + ८ + १५$

योग करने से $१९य = ९५$

१९ का भाग देने से $य = \frac{९५}{१९} = ५$ ॥

(५) $\frac{८ - ७य}{८} + \frac{१२ + ९य}{१६} = \frac{१ - ३य}{१०} - \frac{२९ + ८य}{४०}$ तो य का मान बताओ, हरों का लघुतम समापवर्त्य ८० है इसलिये प्रत्येक पद को ८० से गुणा किया तो

$१०(८ - ७य) + ५(१२ + ९य) = ८(१ - ३य) - ४(२९ + ८य)$ वा $(८० - ७०य) + ६० + ४५य = ८ - २४य - ११६ - ३२य$

पक्षांतरानयन से $२४य + ३२य - ७०य + ४५य = ८ - ११६ - ६० - ८०$

योग करने से $३१य = -२४८$

३१ का भाग देने से $य = \frac{-२४८}{३१} = -८$

(६) $\frac{१}{१४}\left(३य + \frac{२}{३}\right) - \frac{१}{७}\left(४य - ६\frac{२}{३}\right) = \frac{१}{२}(५य - ६)$

तो य का मान बताओ, १४ से गुणा करने से $३य + \frac{२}{३} - २(४य - ६\frac{२}{३}) = ७(५य - ६)$ वा $३य + \frac{२}{३} - (८य - १२\frac{४}{३}) = ३५य - ४२$ ॥

$\therefore ३य + \frac{२}{३} - ८य + १२\frac{४}{३} = ३५य - ४२$

पक्षांतरानयन से $४२ + \frac{२}{३} + १२ + \frac{४}{३} = ३५य + ८य - ३य$

योग करने से $५६ = ४०य$

$\therefore$ ४० का भाग देने से $य = \frac{५६}{४०} = १\frac{२}{५}$

॥ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान बताओ

(१) $६य+२(११-य)=३(१९-य)$ ॥

(२) $३(य+१)+२(य+२)=३२$ ॥

(३) $३य-२(५य+४)=२(४य-९)$ ॥

(४) $५(२य-२)-३(२य+१)=२७$ ॥

(५) $६(३-२य)=२४-४(४य-५)$ ॥

(६) $४५-४(य-२)=५(य+२)$ ॥

(७) $७य=८-\frac{१-९य}{२}$ ॥

(८) $\frac{२य}{७}+४=य-\frac{य-१}{६}$ ॥

(९) $\frac{३य+१}{२}-\frac{य-१}{६}=\frac{२य}{३}+१०$ ॥

(१०) $\frac{१}{२}(य+६)-\frac{१}{१२}(१६-२य)=४\frac{१}{६}$

(११) $\frac{१}{१६}(३य+३)+\frac{१}{२५}(७य-४)-\frac{१}{२०}(७य+१)=२$

(१२) $१०(य+\frac{१}{२})-६य(\frac{१}{य}-\frac{१}{३})=२३$ ॥

(५२)प्र० बहुधा समीकरण में भिन्न पदों के हर में अव्यक्त राशि रहती हैं परन्तु उस का मान पूर्वरीतियों से मिल जाता है प्रथम जो हर जिन में अव्यक्त राशि होवे केवल एक पद के हों ॥ जैसे

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{९}{२य}-४=५$ तो य का मान बताओ ॥

पक्षांतरानयन से $\frac{९}{२य}=५+४$

[यो]ग करने से $\frac{९}{२य} = ९$

[२]य से गुणा किया तो $९ = १८ य$

[१]८ का भाग देने से $य = \frac{९}{१८} = \frac{१}{२}$

[(]७) $\frac{२}{य} + \frac{४}{य} = \frac{३}{य} + \frac{५}{य} - \frac{२}{७}$ तो य का मान बताओ

क्योंकि चारों भिन्नों में य समच्छेद है॥

[य]ोग करने से $\frac{६}{य} = \frac{८}{य} - \frac{२}{७}$

[प]क्षांतरानयन से $\frac{८}{य} - \frac{६}{य} = \frac{२}{७}$

[य]ोग करने से $\frac{२}{य} = \frac{२}{७}$

$\therefore य = ७$

[दू]सरे समीकरण के जिन पदों के हर में अव्यक्त [रा]शि हों वे दो वा अधिक वा पद के हों तो प्रथम जो एक [प]द के हर हों उन्हें दूर करो फिर शोधन पक्षांतरानय[न] और योग करने से समीकरण में थोड़े पद रह जांय [त]ब क्रम से बहुपदों के हरों को दूर करो और जो ए[क] पद के हर न हों तो बहुपद के हरों को एक एक [क]रके दूर करो॥

॥उदाहरण॥

$\frac{६य+१३}{२५} - \frac{३य+५}{५य-२५} = \frac{२य}{५}$ तो य का मान बताओ

प्रथम एक पद के हरों को दूर करने के लिये [२]५ से गुणा किया॥

$६य+१३ - \frac{२५(३य+५)}{५य-२५} = १०य \;...\; २५ \times \frac{२य}{५} = १०य$

अं.श और हर दोनों में ५ का भाग देने से $१३ = \frac{३(३य+५)}{य-५}$

य−५ से गुणा करने से $१३य - ६५ = ९य + १५$

पक्षांतरानयन से $१३य - ९य = ६५ + १५$

योग करने से $४य = ८०$

४ का भाग देने से $य = \frac{८०}{४} = २०$

(२) $\frac{१०य+१७}{१८} - \frac{१२य+२}{११य-८} = \frac{५य-४}{९}$ तो य का मान बताओ॥

१८ और ९ हरों के दूर करने के लिये १८ से गुणा किया तो

$१०य + १७ - \frac{२१६य+३६}{११य-८} = १०य - ८$

शोधन और पक्षांतरानयन से $१७ + ८ = \frac{२१६य+३६}{११य-८}$

योग करने से $२५ = \frac{२१६य+३६}{११य-८}$

११य−८ से गुणा किया $२५(११य-८) = २१६य+३६$

वा $२७५य - २०० = २१६य + ३६$

पक्षांतरानयन से $२७५य - २१६य = २०० + ३६$

योग करने से $५९य = २३६$

५९ का भाग देने से $य = \frac{२३६}{५९} = ४$

(३) $\frac{१}{य-२} - \frac{२}{य+७} = \frac{१}{७(य-२)}$ इस में य का मान बताओ॥

७(य−२) से गुणा करने से $७ - \frac{१४(य-२)}{य+७} = १$ ∵

$७(य-२) \times \frac{१}{य-२} = ७$

पक्षांतरानयन से और योग करने से $६ = \frac{१४(य-२)}{य+७}$

य+७ से गुणा किया तो $६य + ४२ = १४य - २८$

पक्षांतरानयन से $१४य - ६य = ४२ + २८$

ाग करने से $८ = ५६$

८ का भाग देने से $य = \frac{५६}{८} = ७$

(४) $\frac{२(३-४य)}{२-य} + \frac{३}{२-य} = ८$ य का मान बताओ

२-य से गुणा किया तो $२(३-४य) + \frac{९-३य}{२-य} = २४-८य$

वा $६-८य + \frac{९-३य}{२-य} = २४-८य$

ाधन और पक्षांतरानयन से $\frac{९-३य}{२-य} = २४-६ = १८$

२-य से गुणा किया तो $९-३य = १८-१८य$

पक्षांतरानयन से $१८य-३य = १८-९$

योग करने से $१५य = ९$

१५ का भाग देने से $य = \frac{९}{१५} = \frac{३}{५}$ ॥

(५) $\frac{१५+३य}{य+२} + \frac{३०+४य}{य+३} = ७ + \frac{२४}{य+२}$ इसमें य का मान बताओ ॥

य+२ से गुणा किया तो $१५+३य + \frac{३०य+४य^२+३०+४य}{य+३} = ७य+७+२४$

पक्षांतरानयन और योग करने से $\frac{३४य+४य^२+३०}{य+३} = ४य+१६$

य+३ से गुणा किया तो $३४य+४य^२+३० = ४य^२+१६य+१२य+४८$

शोधन और पक्षान्तरानयन से $३४य-१६य-१२य = ४८-३०$

योग करने से $६य = १८$

६ का भाग देने से $य = \frac{१८}{६} = ३$

पक्षांतरानयनसे

७०य	−४२य	= ७००	−५६
३५य	−५६य	८०	−४२
६०य			−२८०

योग करनेसे $\left.\begin{matrix}१६५\\ -९८\end{matrix}\right\}$ य = $\begin{matrix}७८०\\ -३७८\end{matrix}$

$$६७\text{य} = ४०२$$

$$\therefore \text{य} = \frac{४०२}{६७} = ६$$

(२) $\frac{९\text{य} - १३}{४} - \frac{२४९ - ९\text{य}}{१४} = \frac{७\text{य} + ९}{८} - \frac{३\text{य} + १}{७}$ इसमें य का मान बताओ॥

हरों का ५६ लघुतम समापवर्त्य है इस कारण ५६ से गुणा किया तो

$१२६\text{य} - १८२ - ९९६ - ३६\text{य} = ४९\text{य} + ६३ - २४\text{य} + ८$

वा $१२६\text{य} - १८२ - ९९६ + ३६\text{य} = ४९\text{य} + ६३ - २४\text{य} - ८$

पक्षांतरानयनसे $\left.\begin{matrix}१२६\\ ३६\\ २४\end{matrix}\right\}$ य − ४९य = $\left.\begin{matrix}६३\\ १८२\\ ९९६\end{matrix}\right\}$ −८

योग करनेसे $\left.\begin{matrix}१८६\\ -४९\end{matrix}\right\}$ य = $\begin{matrix}१२४१\\ -८\end{matrix}$

$$१३७\text{य} = १२३३$$

$$\therefore \text{य} = \frac{१२३३}{१३७} = ९$$

(३) २०१(य−१)+२५(३य+१)+२२(५य+१)=८५(य+१०)+२१(य+२१)−३५ इसमें य का मान बताओ॥

उत्तर य = २ १/२ ॥

॥ प्रश्न ॥

जिनका उत्तर एक घात एक वर्ण समीकरण के पृथक्करण से निकल आता है॥

५४ प्र० ५३ प्रक्रम जो हम लिख चुके हैं उनके जानने से बहुतेरे प्रश्न जिनके उत्तर अंक गणित से नहीं निकल सक्ते हैं सहज में होजाते हैं और अङ्क गणित में जैसी रीति लिखी होती है कि उनके अनुसार क्रिया करने से प्रश्न का उत्तर निकल आता है वैसी रीति बीज गणित में नहीं लिखने और केवल अभ्यास ही से विद्यार्थी प्रश्न को समीकरण के स्वरूप में लिख सक्ता है परन्तु प्रश्न को अच्छी रीति से समझ के इतना अवश्य देख लेना चाहिये कि प्रश्न में कौन रसी राशि व्यक्त वा दृश्य हैं और कौनसी अव्यक्त वा दृष्ट हैं फिर अव्यक्त राशि के स्थान में य लिखकर व्यक्त राशियों को धरो और प्रश्न से एक ऐसा समीकरण बनालो जिस में प्रश्न की सब बातें पाई जांय॥

॥ प्रश्न ॥

(१) ३ लड़कों की अवस्था मिलकर २४ वर्ष की है और उनके जन्म दिन में दो दो वर्ष का अन्तर है तो बतलाओ कि हर एक लड़के की अवस्था क्या होगी॥

अब इस प्रश्न में देखो कि व्यक्त राशि कौनसी है और अव्यक्त कौनसी॥

॥ व्यक्त राशि ॥

(१) तीनों लड़कों की अवस्था का योग २४ वर्ष है ॥

२) और प्रत्येक दो लड़कों की अवस्था में २ वर्ष का अन्तर है

॥ अव्यक्त राशि ॥

(१) बड़े लड़के की अवस्था बताओ ॥

(२) मझले लड़के की अवस्था बताओ ॥

(३) छोटे लड़के की अवस्था बताओ ॥

परन्तु सच पूछो तो केवल एक ही राशि अज्ञात है क्यों कि जो एक लड़के की अवस्था मालूम हो जाय तो शेष दो लड़कों की अवस्था भी मालूम हो जायगी इस कारण कल्पना करो कि छोटे लड़के की अवस्था य है ॥

तो य + २ मझले लड़के की अवस्था होगी ॥

और य + ४ बड़े लड़के की अवस्था होगी ॥

प्रश्न की एक बात का तो बीजात्मक रूप धर लिया अब दूसरी बात रह गई है वह यह है कि तीनों लड़कों की अवस्था का योग २४ वर्ष है वा य, य + २ और य + ४ अर्थात् ३ य + ६, २४ वर्ष के तुल्य है इसका समीकरण बनाया तो ३ य + ६ = २४ इसमें य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से ३ य = २४ — ६ = १८

३ का भाग देने से य = $\frac{१८}{३}$ = ६

∴ छोटे लड़के की अवस्था ६ वर्ष की है ॥

मझले लड़के की अवस्था ८ वर्ष की है ॥

और बड़े लड़के की अवस्था १० वर्ष की है ॥

(२) मेरे पास जितनी मुहरें हैं उन से पाँच गुने रुपये हैं

और सर्व धन १४७) है तो बतलाओ मेरे पास कितनी मुहर हैं और कितने रुपये ॥

कल्पना करो कि य मुहर हैं

तो ५य रुपये होंगे ॥

और मेरे पास १६) की एक २ मुहर है तो य गुणा १६) वा १६ य रुपये मुहरों के हुए॥

∴ १६ य + ५ य = सर्व धन परंतु सर्व धन = १४७)

∴ २१ य = १४७

२१ का भाग देने से य = $\frac{१४७}{२१}$ = ७ मुहर

और ५य = ५×७ = ३५ रुपये

(३) मैं १४ कोडी और ७ रुपये की हुंडी साहूकार में पटाने को गया और मैंने गुमास्ते के हाथ में हुंडी देकर उस्से कहा कि तुम मुझे इस हुंडी के दाम में मुहर रुपये अठन्नी चौअन्नी दोअन्नी और एकअन्नी बराबर दो तो वह सुनते ही चुपका हो रहा तो बतलाओ कि उस को कितनी मुहर आदि देनी चाहिये ॥

कल्पना करो कि य इष्ट संख्या है॥

तो य मुहरों के य गुणा १६ वा १६ रुपये होंगे॥

य	रुपये के	य	रुपये होंगे
य	अठन्नी यों के	$\frac{य}{२}$	रुपये होंगे
य	चौअन्नियों के	$\frac{य}{४}$	रुपये होंगे
य	दोअन्नियों के	$\frac{य}{८}$	रुपये होंगे
य	एकअन्नियों के	$\frac{य}{१६}$	रुपये होंगे

और २४ कौड़ी ७ रुपयों के २८७ रुपये होंगे
प्रश्न के अनुसार १६ य + य + $\frac{य}{२}$ + $\frac{य}{४}$ + $\frac{य}{८}$ + $\frac{य}{१६}$ = २८७)
१६ से गुणा करने से २५६य + १६य + ८य + ४य + २य + य = ४५९२
योग करने से २८७य = ४५९२
२८७ का भाग देने से य = १६

॥ उत्तर का आलाप ॥

१६	मुहर	=	२५६)
१६	रुपये	=	१६)
१६	अठन्नी	=	८)
१६	चौअन्नी	=	४)
१६	दोअन्नी	=	२)
१६	एकअन्नी	=	१)

जोड़ २८७)

(४ मेरे पास जो आम थे उन में से मैंने तिहाई के आम मोहन को दिये और छठे भाग के आम रूपा को दिये और यह सब मिलाकर १५ भये तो बतलाओ कि मेरे पास सब कितने आम थे ॥

कल्पना करो कि य आमों की संख्या है ॥
तो $\frac{य}{३}$ यह संख्या मोहन को जो आम दिये उन की हुई और $\frac{य}{६}$ यह संख्या रूपा के आमों की हुई और प्रश्न के अनुसार ये सब आम मिला के १५ हैं ॥

अर्थात $\frac{य}{३}$ + $\frac{य}{६}$ = १५
६ से गुणा करने से २य + य = ९०
योग करने से ३य = ९०

४ का भाग देने से $य = \frac{३६}{४} = ९$

यह १ पहिले मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई ॥

य + १ = १० यह दूसरे मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई

य + २ = ११ यह तीसरे मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई

य + ३ = १२ यह चौथे मनुष्य के गन्नों की संख्या हुई

(८) एक मनुष्य ने योग लिया और उसके पास (१७००) जो धन था उस में से जितना धन उसने अपने दो लड़कों को दिया उतना ही धन उसने अपनी तीन बेटियों को दिया और जितना धन मिलकर उसके एक बेटे और बेटी को मिला उतना धन उसने अपनी स्त्री को दिया तो बतलाओ कि प्रत्येक मनुष्य को कितना कितना धन मिला ॥

कल्पना करो एक बेटे का धन य है ॥

तो तीन बेटियों का संपूर्ण धन २य है ॥

∴ एक बेटी का धन $\frac{२य}{३}$ हुआ

और स्त्री का धन $य + \frac{२य}{३}$ वा $\frac{५य}{३}$ हुआ

इसलिये प्रश्न के अनुसार $२य + २य + \frac{५य}{३} = १७००$ रुपये

योग करने से $४य + \frac{५य}{३} = १७००$

वा $\frac{१७य}{३} = १७००$

१७ का भाग देने से $\frac{य}{३} = १००$

३ से गुणा करने से य = ३०० यह एक लड़के का धन हुआ ॥

$\frac{२य}{२}$ = २०० यह एक बेटी का धन हुआ ॥

$\frac{५य}{२}$ = ५०० स्त्री का धन हुआ

(९) एक कुवे में पानी बहुत दूर था उस पर दो पेर लगी एक पेर में तो दो बैल जुते और दूसरी पेर में दो भैंसे और बैल की पेर के चर्स में २ मन पानी समाता था और बैल दो घडी में ३ चर्स पानी के खींचते और भैंसे इतने में नै चलाते कि वे दो चर्स पानी के ३ घडी में खींचते परंतु दोनों पेरों में पानी बराबर ही खिंचता तो बतला ओकि भैंसों की पेर के चर्स में कितना पानी समाता होगा॥

कल्पना करो कि भैंसों के चर्स में य मन पानी समाता है तो भैंसे २य मन पानी तीन घडी में खींचेंगे ॥

और बैल २ घडी में ३ चर्स पानी वा ६ मन पानी खींचते हैं तो इस परिमाण से वे १ घडी में ३ मन पानी खींचेंगे ॥

इस कारण वे ३ घडी में ९ मन पानी खींचेंगे ॥

और ३ घडी में दोनों चर्सों से बराबर ही पानी खिंचता है

∴ २य = ९ मन पानी ॥

और य = $\frac{९}{२}$ = ४ $\frac{१}{२}$ मन पानी इतना पानी भैंसों के चर्स में समाता है ॥

(१०) सीताराम और परसराम के गाँव सड़क के किनारे ३ $\frac{३}{४}$ कोस के अंतर से थे, सीताराम परसराम के गाँव को चला और उसी समय परसराम सीताराम के गाँव को चला, सीताराम ऐसी फुर्ती से चलता था कि १ $\frac{१}{२}$

कोस एक घंटे में चल जाता और परसराम ऐसी शीघ्रता से चलता था कि वह २ कोस १ घंटे में पहुंच जाता तो बतला ओ कि वे दोनों मनुष्य कितनी २ दूर चलकर मिल जांयगे और जो वे बराबर चलकर ठीक बीच राह में मिला चाहें तो सीताराम को परसराम से कितनी देर पीछे चलना चाहिये ॥

प्रथम कल्पना करो कि सीताराम य कोस चलकर परसराम से मिल जाय तो $४\frac{१}{२} - य$ कोस परसराम चला होगा ॥

अब त्रैराशिक से जितना २ समय हर एक को चलने में लगा उसे निकालते हैं ॥

कोस : कोस :: घंटा : घंटा
$२\frac{१}{२} : य :: १ : \frac{२य}{५}$ { इतना समय सीताराम को य कोस चलने में लगा }

कोस : कोस :: घंटा : घंटा
$२ : ४\frac{१}{२} - य :: १ : \frac{४\frac{१}{२} - य}{२}$ { इतना समय परसराम को $४\frac{१}{२}$ – य कोस चलने में लगा }

और दोनों मनुष्य बराबर समय तक चले ॥

इस कारण $\frac{२य}{५} = \frac{४\frac{१}{२} - य}{२}$ इसके दोनों पक्षों को ५, २ वा १० से गुणा किया तो $४य = २२\frac{१}{२} - ५य$, पक्षांतरानयन से $९य = २२\frac{१}{२}$

९ का भाग देने से $य = \frac{२२\frac{१}{२}}{९} = २\frac{१}{२}$ इतने कोस सीताराम चला और $४\frac{१}{२} - २\frac{१}{२}$ वा २ कोस परसराम अपने गांव से चलकर सीताराम को मिला और वहां से सीताराम का गांव $२\frac{१}{२}$ कोस रह गया दूसरे जो दोनों मनुष्य ठीक बीच राह में मिला चाहें तो उनको आधी २ राह चलने में जितना २ समय उनकी शीघ्रता के अनुसार लगेगा उसे

त्रैराशिक से निकालते हैं॥

$४\frac{१}{२}$ कोस का आधा $२\frac{१}{४}$ कोस है

कोस   कोस   घंटा   घंटा

$२\frac{१}{२} : २\frac{१}{४} :: १ : \frac{२\frac{१}{४}\times २}{५}$ इतना समय सीताराम को $२\frac{१}{४}$ कोस चलने में लगेगा॥

ऐसे ही २ कोस : $२\frac{१}{४}$ कोस :: १ घंटा : $\frac{२\frac{१}{४}}{२}$ इतना समय परसराम को $२\frac{१}{४}$ कोस चलने में लगेगा॥

अब देखना चाहिये कि किस मनुष्य को कितना समय अधिक लगेगा इसलिये $२\frac{१}{४}$ कोस चलने में जितना समय दोनों मनुष्यों का लगा उनका अंतर निकालो और जानो कि $२\frac{१}{२}$ घड़ी = १ घंटा और ६० पल = १ घड़ी

$$\frac{२\frac{१}{४}}{२} - \frac{२\frac{१}{४}\times २}{५} = २\frac{१}{४}\left(\frac{१}{२} - \frac{२}{५}\right) = २\frac{१}{४}\times\frac{१}{१०}$$

$= \frac{९}{४०}$ घंटा $= \frac{९}{४०}\times २\frac{१}{२}$ घड़ी $= \frac{९}{१६}$ घड़ी $= \frac{९}{१६}\times$ ६० पल $= ३३\frac{३}{४}$ पल इतना पहिले परसराम अपने गाँव से चलेगा और इतने ही समय पीछे सीताराम अपने गाँव से चलेगा॥

(११२) एक बनिये के पास दो भाव की पैदा है एक ७ आने पनसेरी और दूसरी ६ आने पनसेरी तो इन में से कितनी कितनी पैदा मिलावें जिस से ६ आने ८ पाई पनसेरी के भाव की हो जाय॥

कल्पना करो कि ७ आने के भाव की य पनसेरी मेदा लें तो इसके ७य आने दाम होंगे और जो ६ आने के भाव की १ पनसेरी मेदा लें तो एक पनसेरी के दाम ६ आने होंगे इसलिये दोनों भाव की (य + १) पनसेरी के दाम (७य+६) आने दाम हुए परन्तु हम दोनों भाव की मेदा मिलाके ६ आने ८ पाई पनसेरी का भाव किया चाहते हैं इसलिये इस भाव से (य+१) पनसेरी के दाम (य+१) गुणा ६ आने ८ पाई अर्थात (य+१) ६ $\frac{२}{३}$ आने हुए॥ क्योंकि ८ पाई $= \frac{८}{१२}$ आना $= \frac{२}{३}$ आना॥

$$\therefore ७य + ६ = (य + १) \times ६\frac{२}{३}$$

$$= ६य + \frac{२}{३}य + ६\frac{२}{३} \quad \because ६\frac{२}{३} = ६ + \frac{२}{३}$$

एकांतरानयन से $७य - ६य - \frac{२}{३}य = ६\frac{२}{३} - ६$

योग करने से $\frac{१}{३}य = \frac{२}{३} = \frac{१}{३} \times २$

$$\therefore य = २$$

इस कारण ७ आने के भाव की २ पनसेरी मेदा और ६ आने के भाव की १ पनसेरी मेदा दोनों मिलाई जांय तो मिली हुई मेदा के ६ आने ८ पाई पनसेरी के दाम होंगे॥

(५) एक खेत के नाज को एक आदमी ५ दिन में काट लेता है और वैसे ही दूसरे खेत के नाज को एक लड़का ७ दिन में काट लेता है जो आदमी और लड़का दोनों मिल कर एक खेत के नाज को काटें तो वे कितने दिन में खेत का नाज काटेंगे॥

कल्पना करो कि वे दोनों य दिन में काट लेंगे और आदमी

सब नाज को अकेला ५ दिन में काट लेता है॥

इसलिये वह एक दिन में सब नाज का $\frac{१}{५}$ भाग काट लेगा ऐसे ही लड़का अकेला एक दिन में सब नाज का $\frac{१}{७}$ भाग काट लेगा इस कारण लड़का और आदमी दोनों मिल कर एक दिन में सब नाज का $\left(\frac{१}{५}+\frac{१}{७}\right)$ वा $\frac{१२}{३५}$ भाग काट लेंगे परंतु आदमी और लड़का दोनों य दिन में सब नाज को काट लेंगे इसलिये वे एक दिन में सब नाज का $\frac{१}{य}$ भाग काटेंगे

∴ $\frac{१२}{३५} = \frac{१}{य}$ वा य $= \frac{३५}{१२} = २\frac{११}{१२}$ दिन यही उत्तर हुआ॥

(१३) विक्टोरिया नाम इंग्लिस्तान की महारानी का जन्म २४ मई सन् य को हुआ और ऐलबर्ट राजकुमार का जन्म २६ अगस्त सन् य+१ को हुआ और उसका विवाह १० फ़रवरी सन् १८४० ई॰ को हुआ और २६ अगस्त सन् १८४८ को दोनों महारानी और राजकुमार की अवस्थाओं का योग राजकुमार की अवस्था जो विवाह के पहिले थी उस्से तीन गुना मालूम हुआ तो बतलाओ कि दोनों का किस वर्ष में जन्म हुआ॥

प्रश्न के अनुसार उन दोनों के जन्म वर्ष य+१ हैं तो २६ अगस्त सन् १८४८ को॥

१८४८ — य = महारानी की अवस्था, क्योंकि जिस संवत् तक की अवस्था निकालनी हो उस संवत् में से जन्म के संवत् को घटाओ तो अंतर अवस्था के तुल्य होगा॥

और १८४८ — (य+१) = राजकुमार की अवस्था॥

और विवाह के आगे राजकुमार की अवस्था = १८३९ − (य + १)

॥इसलिये प्रश्न के अनुसार॥

१८४८ − य + १८४८ − (य + १) = ३{१८३९ − (य + १)}

वा १८४८ − य + १८४८ − य − १ = ५५१७ − ३य − ३

पक्षान्तरानयन से ३य − २य = ५५१७ − ३ + १ − १८४८ − १८४८

∴ योग करने से य = $\frac{५५१८}{-३६९६}$ = १८१९ यह महारानी का और य + १ = १८१९ + १ = १८२० यह राजकुमार का जन्म वर्ष हुआ ॥

(१४) एक हौज़ में ३ ऐसी मोरी लगी हैं कि उन में से जो एक मोरी की राह होकर पानी आवे तो हौज़ ५ घड़ी में भर जाता है और जो दूसरी मोरी की राह होकर पानी आवे तो हौज़ ८ घड़ी में भर जाता है और जो तीसरी मोरी में होकर पानी आवे तो हौज़ १० घड़ी में भर जाता है बतलाओ कि जो एक साथ तीनों मोरियों में होकर पानी आवे तो हौज़ कितनी घड़ी में भर जायगा ॥

कल्पना करो कि य, इष्ट घड़ी हैं ॥

पहिली मोरी की राह से ५ घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये एक घड़ी में उसी मोरी की राह सब पानी का $\frac{१}{५}$ भाग हौज़ में भर जायगा और दूसरी मोरी की राह से ८ घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये १ घड़ी में उसी मोरी की राह सब पानी का $\frac{१}{८}$ हौज़ में भर जायगा ऐसे ही तीसरी मोरी की राह से १ घड़ी में सब पानी का $\frac{१}{१०}$ भाग हौज़ में भ

र जायगा॥

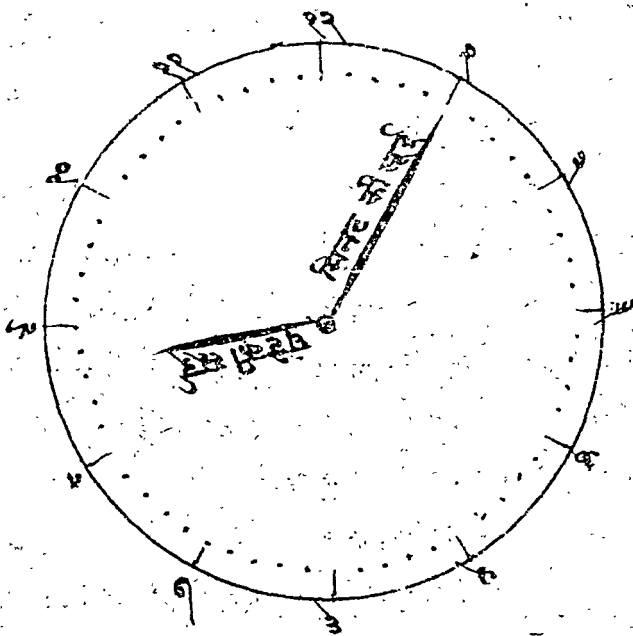
इस कारण जब तीनों मोरी एक साथ चलेंगी तो १ घड़ी में सब पानी का $\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{१०}$ भाग हौज़ में भर जायगा

परन्तु तीनों मोरियों की राह से य घड़ी में सब पानी भर जाता है इसलिये एक घड़ी में तीनों मोरियों की राह से सब पानी का $\frac{१}{य}$ भाग हौज़ में भर जायगा॥

$$\therefore \frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{१०}=\frac{१}{य}$$

$$\frac{६+५+३}{३०} \text{ वा } \frac{१४}{३०}=\frac{१}{य}$$

$$\therefore य=\frac{३०}{१४}=२\frac{१}{७} \text{ घड़ी}$$ ॥

(९५) एक विद्यार्थी ने अपने गुरू से पूछा कि के बजे हैं गुरू ने उत्तर दिया कि २ और ३ के बीच समय है और घंटे की सूई और मिनट की सूई एक स्थान पर है तो बताओ कि

ठीक क्या समय है घड़ी में वृत्त की परिधि के तुल्य ६० भाग होते हैं और जो सूई जितने समय में उनमें से एक भाग में चल जाती है उतने समय को मिनट वा २ $\frac{१}{२}$ पल कहते हैं और इस कारण उस सूई को मिनट की सूई बोलते हैं और वह सूई १२ के चिन्ह से चलकर साठों भागों में फिरकर फिर उसी १२ के चिन्ह तक आ जाती है उतने समय को १ घंटा वा २ $\frac{१}{२}$ घड़ी कहते हैं परंतु घंटा बताने के लिये एक और सूई रहती है उसे घंटे की सूई बोलते हैं यह सूई १२ के चिन्ह से १२ के चिन्ह तक १२ घंटे में फिर कर आ-जाती है इसलिये परिधि के अलग १२ बड़े तुल्य भाग होते हैं उन में से एक भाग में घंटे की सूई एक घंटे में फिरती है और उसी परिधि के छोटे छोटे ६० भाग हैं इसलिये एक बड़े भाग में $\frac{६०}{१२}$ वा ५ छोटे भाग होते हैं इस हेतु मिनट की सूई एक घंटा वा ६० मिनट में साठों छोटे भाग में घूम जाती है और घंटे की सूई एक घंटे में ५ छोटे भा-गों में घूमती है इस कारण मिनट की सूई घंटे की सूई से १२ गुना जलदी चलती है और हर घंटे में घंटे की सूई और मिनट की सूई एक बार मिल जाती हैं कारण यह है कि मिनट की सूई को चौगिर्द घूमते में घंटे की सूई कहीं न कहीं चलती अवश्य मिलती होगी और मिनट की सूई हर एक घंटे के अन्त में फिर फिराकर बारह के चिन्ह पर आ जाती है इस कारण जब घंटे की सूई एक घंटे के चिन्ह पर होगी तो मिनट की सूई १२ के चिन्ह पर होगी इसलिये दोनों सूई के बीच में ५ छोटे भाग होंगे ऐसे ही जब घंटे की सूई २ घंटे के चिन्ह पर होगी तो दोनों सूई

के बीच में १० छोटे भाग होंगे। ऐसे ही और जानो॥

कल्पना करो कि एक बजे के पीछे मिनट की सूई ने १२ के चिन्ह से य, मिनट तक गति की है तो वह अवश्य य, छोटे भागों में गति करेगी और १२ के चिन्ह से १ घंटे के चिन्ह तक ५ छोटे भागों का अन्तर है इसलिये (य—५) इतने स्थान में घंटे की सूई एक घंटे के चिन्ह से गति करेगी और पहिले लिख ही चुके हैं कि घंटे की सूई से मिनट की सूई १२ गुने स्थान में गति करती है॥

∴ य = १२ (य—५)

= १२ य—६०

पक्षांतरानयन और योग करने से ११ य = ६०

११ का भाग देने से य = $\frac{६०}{११}$ = ५ $\frac{५}{११}$

इस कारण एक बजे के उपरान्त ५ $\frac{५}{११}$ मिनट में घंटे और मिनट दोनों की सूई मिल जाती हैं॥

(१६) आगरे से कोयल ३० कोस है और एक घोड़े की डाक आगरे से चलकर कोयल में ६ घंटे में आ पहुंची और जिस समय आगरे की डाक चली उस से एक घंटे पीछे कोयल की डाक चली और वह आगरे तक ७ घंटे में पहुंची तो बतलाओ कि वे दोनों डाक आगरे से कितनी दूर पर सड़क में मिली होंगी॥

कल्पना करो कि दोनों डाक आगरे से य, कोस पर मिलती हैं तो उस मिलने के स्थान से कोयल (३०—य) कोस दूर रह जायगी आगरे की डाक ६ घंटे में ३० कोस तक जाती है इसलिये वह डाक १ घंटे में $\frac{३०}{६}$ वा ५ कोस चलती

होगी ऐसे ही कोयल की डाक एक घंटे में $\frac{३०}{७}$ कोस चलेगी॥

॥त्रैराशिक से॥

कोस कोस घंटा घंटा

५ : य :: १ : $\frac{य}{५}$ इतना समय आगरे की डाक को य कोस चलने में लगा

कोस कोस घंटा $\frac{७(३०-य)}{३०}$ इतना समय कोयल की डाक को (३०-य)

३० : (३०-य) :: ७ :

कोस चलने में लगेगा और कोयल की डाक आगरे की डाक से १ घंटा पीछे चली है इसलिये कोयल की डाक के समय में एक घंटा और मिला दो तो योग आगरे की डाक के समय के बराबर होगा॥

$$\therefore \frac{य}{५} = \frac{७(३०-य)}{३०} + १$$

$$= \frac{७(३०-य)+३०}{३०}$$

३० का गुणा करने से ६ य $= ७(३०-य)+३०$

$= २१० - ७य + ३०$

पक्षांतरानयन और योग करने से १३ य $= २४०$

१३ का भाग देने से य $= \frac{२४०}{१३} = १८\frac{६}{१३}$ कोस

पर आगरे से दोनों डाक मिली होंगी॥

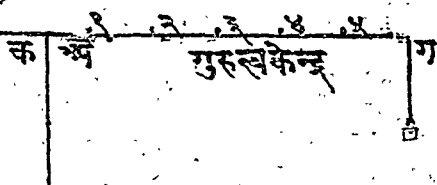
(१७) एक पत्थर २३ मन ३२ सेर का है और दूसरा पत्थर २७ सेर का, और ८ हाथ लंबा एक मजबूत लठ्ठ

है तो बतलाओ कि भारी पत्थर से कितनी दूर पर रोक लगावें जिस पर लट्ठे को रखकर उसके छोर पर भारी पत्थर को लबकाकर वा रखकर दूसरे सिरे पर हलका पत्थर लटका दें जिस्से भारी पत्थर ऊपर को उठ आवे ॥

गति विद्या में यह बात निकलती है कि सरलोत्तोलन दण्ड के एक छोर पर जो बोझ वा बललम्ब रूपी लगाया जाय तो वह आधार के गिर्द घूमेगा या उसका एक भुज नीचे को झुकेगा और दूसरा ऊपर को चढ़ जायगा और आधार से जितनी दूर पर बल वा बोझ लगा हो उस दूरी के बल वा बोझ के परिमाण से गुणा करो तो घात उस दंड के आधार पर घूमने की शीघ्रता का मापक होगा ॥

वा उस बोझ के गति कारक वेग का परिमाण होगा ॥

सरलोत्तोलन दंड का अर्थ उठाने की सीधी लकड़ी है जैसे तराजू की डंडी ढेंकली भुज आदि को गति विद्या में उत्तोलन दंड कहेंगे आधार शब्द का अर्थ रोक वा टेक है जैसे तराजू की दंडी के बीच में जो छेद होता है और उस में रस्सी पिरो के कपड़ा बांध लेते हैं उस स्थान पर जो डंडी को उंगली पर थाम्भो तो दोनों ओर तुली रहेगी इस लिये स्थान की संज्ञा आधार रक्खी है परन्तु इतना अव

श्य चाहिये कि दंडी किसी जगह से नवतीन हो अर्थात

उसका काष्ठ अति कठोर हो प्रथम इस प्रश्न में लठे वा डंडी का बोझ न गिनो ॥

कल्पना करो कि क ग दंड है और अ आधार वा टेक है और क छोर पर के भारी बोझ के उठाने के लिये ग छोर पर हलका बोझ लटकाया गया है और कल्पना करो कि क अ भुज = य हाथ तो अ ग = ६—य हाथ।

१३ मन ३२ सेर = ५५२ सेर

भारी बोझ के परिमाण ५५२ सेर को उसके आधार की य दूरी से गुणा करो तो बात दंड के एक भुज पर जो भारी बोझ का दबाव होगा उसका परिमाण होगा जैसे ५५२ × य ऐसे ही दूसरे भुज पर जो हलके बोझ का दबाव होगा उसका २४ (६—य) होगा और जब दंड के दोनों भुज पर समान दबाव होगा तो दंड आधार पर स्थिर रहैगा॥

इस कारण ५५२ य = २४ (६—य)

= १४४ — २४ य

पक्षान्तरानयन से ५७६ य = १४४

$\therefore$ य = $\frac{१४४}{५७६}$ = $\frac{१}{४}$ हाथ = २ गिरह इस लिये जो टेक बड़े बोझ से दो गिरह पर लगाई जाय तो दोनों बोझ दोनों ओर तुले रहैंगे इस कारण जो टेक को बड़े बोझ की ओर हटा कर रक्खो तो बड़ा बोझ उठ जायगा॥

कारण यह है कि छोटे बोझ का झुकाव अधिक हो जाता है

दूसरे जो लठ वा डंडी ऐसी हो कि वह बराबर एकसी ग[illegible] न हो और उस जगह बोझ में भी एक सी हो अर्थात् उस ब[illegible] एड़ी की लकड़ी ऐसी न हो कि उसका एक भाग दूसरे उसने[illegible] बड़े भाग से तोल में अधिक हो ऐसी दशा को जो बोझ बीच

आ जोगे तो वह उस स्थान पर ठहरी रहेगी अर्थात दण्डी का गुरुत्व केन्द्र उसके ठीक बीच में होगा और पूर्वोक्त प्रश्न में कल्पना करो कि जैसे लट्ठा या दण्डी का बोझ २० सेर है॥

तो ६ हाथ की दण्डी के बीच में ३ हाथ पर गुरुत्व केन्द्र का स्थान होगा और इसलिये उस की दूरी आधार से ३−य होगी॥

गति विद्या के साध्य के अनुसार जब दोनों बोझ तुले रहेंगे।

तो $५५२य = २४(६-य) + २०(३-य)$

$= १४४ - २४य + ६० - २०य$

$= २०४ - ४४ य$

पक्षान्तरानयन से $५९६ य = २०४$

५९६ का भाग देने से $य = \frac{२०४}{५९६}$ हाथ $= \frac{२०४ \times ८}{५९६}$ गिरह

$= \frac{२०४ \times २}{१४९} = २\frac{३}{४} - \frac{१\frac{३}{४}}{१४९}$

$= २.७४$ गिरह

इसलिये जो टेक बड़े बोझ से २.७४ गिरह से कम दूरी पर लगाई जाय तो बड़ा बोझ उठ जायगा॥

तीसरे जो सामान्य दंडी हो जैसी उस लकड़ी आदि-तौलने की दंडी होती हैं और कल्पना करो कि ६ हाथ की दंडी का गुरुत्व केन्द्र आधार की ओर दंडी के सिरे से $३\frac{१}{२}$ हाथ पर है तो गुरुत्व केन्द्र स्थान आधार से $३\frac{१}{२} - य$ हाथ की दूरी पर होगा और मानो कि दण्डी का बोझ २० सेर है॥

गति विद्या के साध्य के अनुसार जब दोनों बोझ तुले रहेंगे तो $५५२य = २४(६-य) + २०(३\frac{१}{२}-य)$

$= १४४ - २४य + ७० - २० य$

$= २१५ - ४४य$

पक्षान्तरानयनसे $५९६ य = २१५$

$\therefore य = \frac{२१५}{५९६}$ हाथ $= \frac{२१५\times८}{५९६}$ गिरह

$= \frac{२१५\times२}{१४९} = २\frac{१}{४}$ गिरह $\frac{१८\frac{३}{४}}{१४९}$

$= २\cdot८७$ गिरह

इसलिये जो टेक बड़े बोझ से २·८७ गिरह से कम दूरी पर लगाई जाय तो बड़ा बोझ उठ जायगा॥

(१८) केवल दूधका सजातीय गुरुत्व १·०३ है और पानी मिले दूध का सजातीय गुरुत्व १·०२६२५ है तो बतलाओ कि दूधमें कितना पानी मिला है॥

परिभाषा जितने स्थान में एक पदार्थ अम्बाता हो उसमें जितना जल अम्बाले उसके बोझ से जे गुना पदार्थ का बोझ हो उसे उस पदार्थ का सजातीय गुरुत्व कहते हैं॥

जैसे चांदी का सजातीय गुरुत्व १०·५ वा १०$\frac{१}{२}$ है इस्से यह अर्थ है कि जितने स्थान में कुछ चांदी अम्बाती है उसमें जितना जल अम्बाय उसके १०$\frac{१}{२}$ गुने बोझ के बराबर चांदी का बोझ होगा॥ ऐसे ही दूध का १·०३ यह जो सजातीय गुरुत्व लिखा है उसका भी यह अर्थ है कि जितने स्थान में कुछ दूध अम्बाता हो उतने स्थान में जो जल भरदिया जाय तो उसके बोझ से दूध का बोझ १·०३ गुना होगा॥

कल्पना करो कि य सेर दूध में १ सेर पानी मिला है तो केवल य सेर दूध का बोझ य सेर पानी के १·०३ के गुने बोझ के बराबर होगा॥

अर्थात्

य सेर केवल दूध का बोझ = १.०३ गुना य सेर पानी का बोझ
= १.०३ × य × १ सेर पानी का बोझ॥
∴ य सेर = य गुणा १ सेर वा य × १ सेर
इसलिये य सेर दूध में १ सेर पानी मिलाया तो य सेर दूध और एक सेर पानी का बोझ॥ वा
(य × १) सेर पानी मिले दूध का बोझ = १.०३ × य × १ सेर पानी का बोझ
+ १ सेर पानी का बोझ
= (१ + १.०३ य) × १ सेर पानी का बोझ

परन्तु प्रश्न के अनुसार पानी मिले दूध का सजातीय गुरुत्व १.०२६२५ है वा पानी मिला दूध केवल पानी से बोझ में १.०२६२५ गुना है इसलिये पानी मिले दूध (य+१) सेर का बोझ केवल पानी (य+१) सेर के बोझ से १.०२६२५ गुणा है। अर्थात
(१) सेर पानी मिले दूध का बोझ = १.०२६२५ × (य+१) सेर केवल पानी का बोझ
= १.०२६२५ × $\overline{य+१}$ × १ सेर पानी का बोझ
∴ (य+१) सेर पानी = (य+१) बार १ सेर पानी॥
= (य+१) × १ सेर पानी॥
और आगे लिख ही चुके हैं कि (य+१) सेर पानी मिले दूध का बोझ = (१ + १.०३ × य) × १ सेर पानी का बोझ॥
∴ (१ + १.०३ × य) × १ सेर पानी का बोझ = १.०२६२५ × $\overline{य+१}$ × १ सेर एक सेर पानी का बोझ दूसरा भाग देने से
१ + १.०३ × य = १.०२६२५ (य+१)

पक्षान्तरानयन से (१.०३—१.०२६२५) य = १.२६२५—१

योग करने से .००३७५ य = .०२६२५

.००३७५ का भाग देने से य = $\frac{.०२६२५}{.००३७५}$ = ७

इससे मालूम पड़ता है कि ७ सेर दूध में १ सेर पानी मिला है इसलिये पानी मिले दूध में अष्टमांश पानी है॥

(१९) एक मनुष्य का नगर ऊंचे पर बसता था उसने कुछ दूर पर बन्दूक छूटती देर उजाला देखा और इसके २६ $\frac{२}{५}$ विपल १० $\frac{२}{५}$ सेकण्ड पीछे बंदूक की आवाज सुनी तो बतलाओ कि बंदूक उस मनुष्य से कितनी दूर पर छूटी और मानो कि उजाला १ सेकंड वा २ $\frac{१}{२}$ विपल में १९२००० मील चलता है और शब्द १०९० फ़ुट एक सेकंड में पहुंचता है॥

कल्पना करो कि मनुष्य से य दूरी पर बंदूक छूटी उजाला बंदूक से जितने सकेंड में मनुष्य तक पहुंचा उसका परिमाण त्रैराशिक से निकालते हैं॥

मील	मील	सेकण्ड	सेकण्ड
१९२००० :	य	:: १ :	१९२०००

३×१७६० या ५२८० फ़ुट का १ मील होता है॥

शब्द बन्दूक से निकल कर जितने सेकंड में मनुष्य तक पहुंचा उसका परिमाण त्रैराशिक से निकालते हैं॥

य मील = ३×१७६०×य फ़ुट

फ़ुट	फ़ुट	सेकंड	सेकंड
१०९० :	३×१७६०×य	:: १ :	$\frac{३×१७६०×य}{१०९०}$

और प्रश्न के अनुसार उजाला और शब्द के पहुंचने में १० $\frac{२}{५}$ सेकण्ड का अन्तर है॥

$$\therefore \frac{३×१७६०×य}{१०९०} - \frac{य}{१९२०००} = १०\frac{२}{५}$$

$$\therefore \frac{३ \times १७६ \times १९२००० - १०९}{१०९ \times १९२०००} \times य = १० \frac{१}{२}$$

$$\therefore य = \frac{१०९ \times १९२००० \times १० \frac{१}{२}}{३ \times १७६ \times १९२००० - १०९}$$

$$= \frac{२१९७४४०००}{१०१३७५८९१} = २ \frac{१}{६} \text{ मील ॥}$$

(२७) सोने का सजातीय गुरुत्व १९ $\frac{१}{४}$ है और चांदी का सजातीय गुरुत्व १० $\frac{१}{२}$ है और एक सुनार के पास चतुर्थांश घन फ़ुट सोना २६० पौंड वा १३० सेर है तो बतलाओ कि वह केवल सोना ही है वा उस में चान्दी मिली है और जो चान्दी मिली है तो कितना सोना है और कितनी चांदी है

घन फ़ुट का अर्थ है एक फ़ुट लंबा एक फ़ुट चौड़ा और एक फ़ुट गहरा और १६ औन्स वा ८ छटांक का एक पौंड वा आध सेर होता है ॥

एक घन फ़ुट पानी में १००० औंस वा ५०० छटांक बोझ होता है और सुवर्ण पानी से १९ $\frac{१}{४}$ गुना भारी होता है इस लिये १ घन फ़ुट सोना १ घन फ़ुट पानी के बोझ से १९ $\frac{१}{४}$ गुना भारी होगा वा १९ × $\frac{१}{४}$ × १००० औन्स वा १९२५० औन्स तौल में होगा और इस कारण $\frac{१}{४}$ घन फ़ुट सोना ४८१२ $\frac{१}{२}$ औन्स वा ३०० पौण्ड और १२ $\frac{१}{२}$ औन्स तौल में होगा और सुनार के पास जो $\frac{१}{४}$ घन फ़ुट सोना है वह २६० पौण्ड तौल में है इस कारण वह केवल सोना ही नहीं है ॥

१ घन फ़ुट चान्दी एक घन फ़ुट पानी के बोझ से १० $\frac{१}{२}$ गुना होती है वा १० $\frac{१}{२}$ × १००० औंस वा १०५०० औंस तौल में होती है इस कारण $\frac{१}{४}$ घन फ़ुट चान्दी २६२५ औन्स वा १६४ पौन्ड और १ औन्स तौल में होगी और सुनार के पास

जो $\frac{१}{४}$ घन फ़ुट सोना है वह २६० पौण्ड तोल में है इस कारण वह चान्दी से अधिक भारी है और सोने से हलका इसलिये उस सोने में चांदी और सोना दोनों मिले हैं॥

कल्पना करो कि १ घन फ़ुट का $\frac{१}{य}$ भाग सुवर्ण है तो $\frac{१}{४} - \frac{१}{य}$ भाग चान्दी होगी और ऊपर लिख ही चुके हैं कि १ घन फ़ुट सुवर्ण १९२५० औन्स तोल में होता है इसलिये १ घन फ़ुट का $\frac{१}{य}$ भाग सुवर्ण $\frac{१९२५०}{य}$ औन्स तोल में होगा ऐसे ही $\left(\frac{१}{४} - \frac{१}{य}\right)$ भाग चान्दी $१०५००\left(\frac{१}{४} - \frac{१}{य}\right)$ तोल में होगी परन्तु प्रश्न के अनुसार चान्दी और सोना दोनों का बोझ मिलकर २६० पौण्ड वा ४१६० औन्स है॥

$$\therefore \frac{१९२५०}{य} + १०५००\left(\frac{१}{४} - \frac{१}{य}\right) = ४१६०$$

$$\frac{१९२५०}{य} + \frac{१०५००}{४} - \frac{१०५००}{य} = ४१६०$$

$$\frac{१९२५०}{य} + २६२५ - \frac{१०५००}{य} = ४१६०$$

य से गुणा किया तो $१९२५० + २६२५य - १०५०० = ४१६०य$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $१५३५य = ८७५०$

$\therefore य = \frac{८७५०}{१५३५} = \frac{१७५०}{३०७}$ इस भिन्न के ३०७ हर के स्थान में आसन्न मान जानने के लिये ३०० रक्खा। तो

$$य = \frac{१७५०}{३००} = \frac{१७५}{३०} = \frac{३५}{६} \therefore \frac{१}{य} = \frac{६}{३५} = \frac{६\times४}{३५\times४}$$

$= \frac{२४}{१४०}$ यह सुवर्ण का परिमाण हुआ और $\frac{१}{४} - \frac{१}{य} =$
$\frac{१}{४} - \frac{६}{२५} = \frac{११}{१४०}$ यह चान्दी का परिमाण हुआ॥

इसलिये जो १ संपूर्ण घनकुट के १४० तुल्य खण्ड किये जांय तो चतुर्थांश घनकुट में २४ भाग सुवर्ण होगा और ११ भाग चान्दी क्योंकि २४+११=३५×४=१४० ॥

॥अभ्यास के लिये उदाहरण॥

(१) वह कौनसी संख्या है कि जो उस संपूर्ण संख्या में उसका आधा जोड़ दें तो योग २४ हो॥

(२) वह कौन सी संख्या है कि जो उसमें उसके दो तृतीयांश जोड़ दें तो योग २० हो॥

(३) वह संख्या कौन सी है कि जो उसके आधे और तृतीयांश में २ का अंतर हो॥

(४) वह कौन सी संख्या है कि उसका चतुर्थांश उसके पंचमांश से ३ के तुल्य बड़ा हो॥

(५) एक ऐसी राशि है कि उस में से ८ घटाकर शेष को ६ से गुणाकर घात निकाललो और उस पूर्व राशि में से जो ४ को घटाकर शेष को ८ गुणाकर दो तो यह घात पूर्व घात के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि ऐसी कौन सी राशि है॥

(६) ४० के दो ऐसे खंड करो कि जो छोटे खण्ड के ३ यांश को बड़े खण्ड के पञ्चमांश में से घटादें तो शेष ५ रहजाय॥

(७) २४ के ऐसे दो भाग करो कि एक भाग दूसरे भाग के तीन चतुर्थांश के तुल्य हो॥

(८) दो ऐसी राशि निकालो जो बड़ी राशि में छोटी राशि

का भाग दें तो लब्धि ७ मिले और जो बड़ी राशि में से छोटी राशि को घटा दो तो भी शेष ७ ही रहे॥

(१९) २० रुपयों को ४ लड़कों में इस रीति से बांटें कि सब से बड़े लड़के को दूसरे लड़के से ५) अधिक मिले और दूसरे लड़के को तीसरे लड़के से ५) अधिक मिले और ऐसे ही तीसरे लड़के को चौथे लड़के से ५) सिवाय मिले॥

(२०) ३३ हाथ रस्सी है उस के ऐसे चार टुकड़े करो कि दूसरा टुकड़ा पहिले टुकड़े से १ $\frac{1}{2}$ हाथ बड़ा हो और तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से २ $\frac{1}{2}$ हाथ बड़ा हो और चौथा टुकड़ा तीसरे टुकड़े से ३ $\frac{1}{2}$ हाथ बड़ा हो॥

(२१) सर्राफ़ की दूकान पर ७) की अठन्नी और चौअन्नी भुनाने गया और मैंने उस से कहा कि मुझे अठन्नियों से चौअन्नियां दूनी दे तो बतलाओ कि वह मुझे कितनी अठन्नियां देगा और कितनी चौअन्नियां॥

(२२) बराबर दोअन्नी बराबर चौअन्नी बराबर अठन्नी और बराबर रुपये मिलकर १५) के तुल्य हैं तो बतलाओ कि दोअन्नी चौअन्नी आदि कितनी २ हैं॥

(२३) मेरे पास जितने रुपये हैं उन से पांच गुनी अठन्नियां हैं और सर्व धन २८) रुपये हैं तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रुपये हैं और कितनी अठन्नियां॥

(२४) एक लड़के की अवस्था से बाप की अवस्था चौगुनी है परन्तु तीन वर्ष पहिले पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से सात गुनी थी तो बतलाओ कि हर एक की क्या अवस्था है॥

(२५) एक मनुष्य के दो पुत्र हैं उन में बड़ा पुत्र छोटे पुत्र

से २ वर्ष बड़ा है और दोनों पुत्रों की अवस्थाओं का योग पिता की अवस्था के तुल्य है और जो पिता की अवस्था में न से उन की चतुर्थांश अवस्था जोड़ दें तो उस की ८० वर्ष की अवस्था होजाय सो बतलाओ कि हर एक की अवस्था क्या होगी ॥

(२६) एक पुरुष और स्त्री की अवस्था मिलकर ८० वर्ष की है और २० वर्ष पहिले स्त्री की अवस्था पुरुष की अवस्था का दो तृतीयांश थी तो बतलाओ कि हर एक की अवस्था क्या है ॥

(२७) एक ऐसा भिन्न है कि उसका हर अंश से १ के तुल्य बड़ा है और जो अंश में से २ घटा दो और हर में एक जोड़ दो तो भिन्न $\frac{1}{2}$ के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि पूर्व भिन्न कौनसा है ॥

(२८) एक ऐसा भिन्न है कि उसका अंश हर से २ के तुल्य छोटा है और जो अंश में से १ घटा दो और हर में अंश जोड़ दो तो भिन्न $\frac{1}{4}$ के तुल्य होजाता है तो बतलाओ कि पूर्व भिन्न कौनसा है ॥

(२९) एक विद्यार्थी से कहा कि तू एक संख्या के आधे में ४ का भाग दे और दूसरी आधी संख्या में ६ का भाग दे और दोनों लब्धियों का योग बतला दे तो उस विद्यार्थीने शीघ्रता से एक ही बार उत्तर लाने के लिये संपूर्ण संख्या में ५ का भाग दिया परंतु इस लब्धि से शुद्ध उत्तर २ के समान बड़ा है तो बतलाओ कि वह कौनसी संख्या है ॥

(३०) १२ बजे के उपरान्त घंटे की सुई ठीक मिनट की सुई के सन्मुख है तो बतलाओ कि १२ पै कितने मिनट व्यतीत हुए

हैं॥

(२१) एक मनुष्य के पास घड़ी थी उससे जब मैंने पूछा कि कै बजे हैं तो उसने मेरी परीक्षा करने के लिये उत्तर दिया कि ५ और ६ बजे के बीच में समय है और घंटे की सुई और मिनट सुई एक स्थान पर है तो बतलाओ कि ५ पै कितने मिनट व्यतीत हुए होंगे॥

(२२) एक मनुष्य को आवश्यक काम के लिये एक ८ कोस गांव है वहां भेजा परंतु उस्से कुछ कहना बाकी रहगया था इसलिये उसे लौटाने के अर्थ १ घड़ी पीछे से दूसरा मनुष्य भेजा पहिला मनुष्य इस परिमाण से चलता था कि वह ४ कोस ६ घड़ी में पहुंच जाता और दूसरा मनुष्य ४ $\frac{1}{2}$ कोस ६ घड़ी में पहुंचजाता तो बतलाओ कि दूसरे मनुष्य को पहिला मनुष्य गांव से कितनी दूर पर मिलेगा॥

(२३) एक हौज़ में तीन मोरियों की राह से २० पल में ८२० मन पानी भर जाता है और तीसरी मोरी में होकर जितना जल एक पल में आता है उस्से १ मोरी में तो ५ मन पानी हर पल में कमती आता है और दूसरी मोरी में हर पल में १० मन पानी अधिक आता है तो बतलाओ कि हर एक मोरी की राह से हर पल में कितना जल हौज़ में गिरता है॥

(२४) एक आदमी और लड़के ने १ खेत काटने को २१ आने का ठेका लिया परंतु जब संपूर्ण काम का दो पंचमांश होगया तब लड़का बैठ रहा और आदमी अकेले ने काम समाप्त किया और जितने दिनों में वे मिलकर काम करते उन से १ $\frac{1}{4}$ दिन अधिक लगा और लड़का आदमी से आधा काम करता इसलिये लड़के को मजूरी से आधी मजदूरी मिली तो

बतलाओ कि दोनों को क्या रोज़ मिलता होगा ॥

॥ १ अभ्यास के लिये परिभाषा संबंधी जो प्रश्न हैं उन के उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	२०	(५)	१३	(९)	३९	(१३)	३अ
(२)	६	(६)	३५	(१०)	६२	(१४)	६अक
(३)	७	(७)	६२	(११)	०	(१५)	६ख
(४)	०	(८)	१०	(१२)	२		

(१६) २, २क, कय, ३कय, प, यप, पप, कयर

(१७)	५	(२१)	३०	(२५)	१	(२९)	३
(१८)	११	(२२)	१०	(२६)	२३	(३०)	म+न−५
(१९)	१२	(२३)	९	(२७)	१४		
(२०)	७	(२४)	३	(२८)	१ ३/४		

॥ २ अभ्यास के लिये परिभाषा संबंधी जो प्रश्न हैं उन के उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	१८	(५)	०	(९)	२	(१३)	३अ+६न −४प
(२)	०	(६)	४९ १/२	(१०)	६	(१४)	४
(३)	११४	(७)	२१	(११)	२५	(१५)	−२
(४)	६५७	(८)	म+७न−६४प	(१२)	१	(१६)	−१

॥ ४ अभ्यास के लिये जो योग संबंधी प्रश्न हैं उनके उत्तर

उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	२अ+२क	(१९)	२+५अ
(२)	२अ	(२०)	२अ+६ग
(३)	$२अ^२-२क$	(२१)	३ल−२र
(४)	२अ	(२२)	$३अ^२+अक-२क^२$
(५)	२अ+२ग	(२३)	६−५य
(६)	१+म+न	(२४)	२अग+२कघ
(७)	७म−१	(२५)	२अय−२कर
(८)	७दर+४प	(२६)	$२य^२+२अ^२$
(९)	प−२व+८	(२७)	$अ^२+क^२+ग^२$
(१०)	६अक−कग+कप	(२८)	$य^२+यर+र^२+मय$ +नर
(११)	मन+म−न+१	(२९)	$५य^२र-३अ^२यर$ $-अ^२य+य^३$
(१२)	३अय+२कर	(३०)	$\frac{३}{२}अघ+\frac{३}{२}कघ$ $-गघ+\frac{३}{२}अक-अग$
(१३)	५अ−५क+५ग		
(१४)	$४यर-य^२-४$		
(१५)	३व−२प+पव		
(१६)	$२प^२+२व^२$		
(१७)	८अक+अग−१		
(१८)	४य+३र		

॥ ६ अभ्यास के लिये व्यवकलन संबंधी जो उदाहरण हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	अ−क+य	(३)	५अ−३ग
(२)	२क−२ग	(४)	८अ−७क

(३१) $१६य^{४} - २४य^{३} + ३६य^{२} - ५४य + ८१$

॥ ७ अभ्यास के लिये सम महत्तमापवर्तक संबंधी जो प्रश्न हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	४	(६)	अपय	(११)	अयर
(२)	२५	(७)	५अकय	(१२)	$\frac{२}{५}$ अ
(३)	२०	(८)	$३अ^{२}क^{२}$	(१३)	य
(४)	य	(९)	$९अ^{४}क^{२}ग^{६}$	(१४)	य
(५)	$कय^{२}$	(१०)	७मनप		

॥ लघुसमापवर्त्य संबंधी प्रश्नों के उत्तर नीचे लिखे हैं ॥

(१५)	१६८	(१९)	२५२०	(२३)	२४म
(१६)	२४०	(२०)	४२५०४	(२४)	अकग
(१७)	५६	(२१)	अकय	(२५)	$२य^{२}र^{२}$
(१८)	१६८	(२२)	२अयर	(२६)	कगघ

॥ ८ अभ्यास के लिये भिन्न लघुतम रूप करने के जो उदाहरण हैं उनके उत्तर लिखते हैं ॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{२अ}{३}$	(५)	$\frac{५य}{अ}$	(९)	$\frac{२अ+३}{क}$
(२)	२क	(६)	$\frac{१}{२कय}$	(१०)	$\frac{३क+१}{२प}$
(३)	$\frac{४कय}{३अप}$	(७)	$\frac{म-न}{मन}$	(११)	$\frac{३अ-२प}{२अ-३प}$
(४)	$\frac{कय}{२}$	(८)	$\frac{२य-३}{५}$	(१२)	$\frac{न-म+प}{म-न+प}$

॥ ८ अभ्यास के लिये भिन्न के जोड़ने और घटाने के उदाहरणों के उत्तर लिखते हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	$\frac{६य}{५}$	(१६)	$\frac{कगय+अगर+अकल}{अकग}$
(२)	$\frac{५अक}{६}$	(१७)	$\frac{अयर+गयर}{अकग}$
(३)	$\frac{३अ+१}{३}$	(१८)	०
(४)	$\frac{२अ}{५}$	(१९)	$\frac{य}{२०}$
(५)	$\frac{६य-४}{७}$	(२०)	$\frac{य}{८}$
(६)	$\frac{१०य-२}{२१}$	(२१)	$\frac{१}{२}$
(७)	$\frac{६}{अ}$	(२२)	$\frac{य+१}{८}$
(८)	$\frac{६}{अक}$	(२३)	$\frac{५य-र-३}{१०}$
(९)	$\frac{य^२+र^२+२यर}{य^२र^२}$	(२४)	$\frac{४य+१६}{य+१}$
(१०)	$\frac{कग+२ग+३}{अकग}$	(२५)	$\frac{२}{य}$
(११)	$\frac{१९य-२३}{६}$	(२६)	$\frac{२य^२+य}{य^२+३य+२}$
(१२)	$\frac{३४य-२३}{१२}$	(२७)	$\frac{५य+३५}{४२}$
(१३)	$\frac{४३य-१३}{५०}$	(२८)	$\frac{१७य-३६}{५०}$
(१४)	$\frac{६१}{१५य}$	(२९)	$\frac{अगय}{क^२+कगय}$
(१५)	$\frac{५१}{२०र}$	(३०)	$\frac{य^२+र^२}{यर+र^२}$
		(३१)	$\frac{१}{२+य^२+२य}$
		(३२)	$\frac{४यर}{य^२-र^२}$

॥२१ अभ्यास के लिये जो कोष्ठ संबंधी प्रश्न लिखे हैं उनके उत्तर नीचे लिखे हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	अग	(८)	अय² + कय²	(१६)	$\frac{क}{अ}$
(२)	४ − य	(९)	६ − ५य	(१७)	$\frac{२ + य}{१ − य^२}$
(३)	४य	(१०)	१ − य	(१८)	२
(४)	२अ² − २क²	(११)	५अ − ३ग	(१९)	य² + य
(५)	७ + ५य	(१२)	अ²	(२०)	४य² − य⁴
(६)	$\frac{३अ − २य}{२}$	(१३)	१ − य²		
(७)	क	(१४)	य		
		(१५)	$\frac{अ}{क}$		

॥२२ अभ्यास के लिये जो एक घात एक वर्ण समीकरण संबंधी उदाहरण लिखे हैं उनके उत्तर लिखे हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य = ६	(११)	य = ५	(२१)	य = ५
(२)	य = १	(१२)	य = १२	(२२)	य = ५
(३)	य = ६	(१३)	य = १	(२३)	य = ७
(४)	य = ८	(१४)	य = $\frac{५}{२}$	(२४)	य = ७
(५)	य = ३	(१५)	य = ४	(२५)	य = ७
(६)	य = ४	(१६)	य = १२	(२६)	य = २४
(७)	य = २	(१७)	य = ९	(२७)	य = ६०
(८)	य = १	(१८)	य = ७	(२८)	य = ८४
(९)	य = १०	(१९)	य = १०	(२९)	य = ३५
(१०)	य = ८	(२०)	य = २०	(३०)	य = ५

(३१)	य=१०	(३३)	य=९	(३५)	य=४
(३२)	य=२	(३४)	य=७	(३६)	य=८

॥२३ अभ्यास के लिये कोष्ठ संबंधी समीकरण के जो उदाहरण लिखे हैं उनके उत्तर लिखते हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य=५	(५)	य=$६\frac{१}{३}$	(९)	य=१६
(२)	य=५	(६)	य=$४\frac{७}{८}$	(१०)	य=८
(३)	य=$\frac{२}{३}$	(७)	य=२	(११)	य=७
(४)	य=१०	(८)	य=७	(१२)	य=२

॥२४ अभ्यास के लिये भिन्न संबंधी जो समीकरण॥ लिखे हैं उनके उत्तर लिखते हैं॥

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	य=$\frac{१}{६}$	(४)	य=१८	(७)	य=८
(२)	य=$\frac{१}{२०}$	(५)	य=८	(८)	य=१२
(३)	य=$\frac{१}{अक}$	(६)	य=८	(९)	य=$\frac{२}{४}$
				(१०)	य=२

॥२५) अभ्यास के लिये एक ज्ञात पक वर्ण समीकरण संबंधी जो प्रश्न लिखे हैं उनके उत्तर लिखते हैं

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(१)	१६	(५)	२०
(२)	२३	(६)	२० और ३०
(३)	१८	(७)	$१०\frac{५}{७}$ और $१४\frac{३}{७}$
(४)	६०	(८)	$१\frac{१}{६}$ और $८\frac{१}{६}$

प्रश्न	उत्तर	प्रश्न	उत्तर
(९)	६।।), ५।।), ४।।), ३।।)	(१८)	$\frac{३}{५}$
(१०)	५, ६ $\frac{१}{२}$ ८ और ११ $\frac{१}{२}$ हाथ	(१९)	२४०
(११)	१० अठन्नी और २० चौअन्नी	(२०)	२७ $\frac{३}{११}$ मिनट १ बजे पहिले
(१२)	८	(२१)	२७ $\frac{३}{११}$ मिनट ५ बजे उपरांत
(१३)	८ और ४०	(२२)	२ कोस
(१४)	३० और ६ वर्ष	(२३)	२२, ७, १२ मन
(१५)	३५, ३६, और ७१		≡) ४ $\frac{८}{२५}$ पाई
(१६)	४८ और ३६		और —) ८ $\frac{४}{२५}$ पाई
(१७)	$\frac{४}{५}$		शुभं भवतु

इति बीज गणित प्रथम भाग: समाप्त:

॥ हिन्दी बीजगणित ॥

दूसरा भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय ज़िलों की पाठशालाओं के विद्यार्थियों के लिये पण्डित मोहनलाल ने अंग्रेज़ी से

हिन्दी भाषा में उलथा किया

अवध देश के डैरेक्टर आफ़ पब्लिक

इन्स्ट्रक्शन श्रीयुत विलियम हेन्ड फ़ोर्ड साहिब बहादुर के हुक्म से

स्थान लखनऊ

मतबा मुन्शी नवलकिशोर में छापा गया

सन् १८६५ ई०

॥ हिन्दीबीजगणित के दूसरे भाग का सूचीपत्र ॥

॥ हिन्दी बीजगणित ॥

॥ दूसरा भाग ॥

॥ दो वर्ण एक घात समीकरण ॥

५५ प्र० जो केवल एक समीकरण में दो अव्यक्त राशि य और र हों जैसे २य + ३र = २० तो पक्षान्तरानयन से २य = २० — ३र और २ का भाग देने से य = १० — $\frac{३र}{२}$ परन्तु इस समीकरण में य का मान व्यक्त नहीं है कारण यह है कि उसके मान के एक पद में र अव्यक्त राशि मिली है इसलिये जो एक और समीकरण हो जैसा ३य + २र = २५ और उसमें य और र राशियों के मान जो पूर्व समीकरण में हों रखने से उस समीकरण की समता बनी रहे तो

∵ ३य + २र = २५

∴ पक्षान्तरानयन से ३य = २५ — २र

३ का भाग देने से य = $\frac{२५}{३}$ — $\frac{२र}{३}$

और पूर्व समीकरण में य का मान १० — $\frac{३र}{२}$ निकला है और दोनों समीकरण में य का एक ही मान कल्पना किया है इस कारण दोनों मान य राशि के तुल्य हैं वा १० — $\frac{३र}{२}$ = $\frac{२५}{३}$ — $\frac{२र}{३}$

इस समीकरण में केवल एक ही य राशि अव्यक्त है समीकरण के दोनों पक्षों की राशियों को २४ ३ व ६ से गुणा किया तो $६० — ९र = ५० — ४र$

पक्षान्तरानयन से $६० — ५० = ९र — ४र$

योग करने से $१० = ५र$

५ का भाग देने से $२ = र$ वा $र = २$

और पहले समीकरण में $य = १० — \frac{३र}{२}$ इसमें र का मान २ रखने से $य = १० — \frac{६}{२} = १० — ३ = ७$

इसलिये $२य + ३र = २०$ और $३य + २र = २५$ इन दोनों समीकरण में $य = ७$ और $र = २$ इन मानों को दोनों समीकरण में य और र राशियों के स्थान में रखने से उनकी समता बनी रहैगी जैसे पहले समीकरण में $२ \times ७ + ३ \times २ = २०$ और दूसरे समीकरण में $३ \times ७ + २ \times २ = २५$

जो दो समीकरण में अव्यक्त राशियों के एक से मान हों तो उनको समीकरणमितिवर्ण समीकरण कहेंगे और दोनों समीकरण को नीचे ऊपर लिख कर उनके दाहिनी ओर } ऐसा कोष्ट कर देते हैं और जो दो समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाते हैं कि उस में केवल एक अव्यक्त राशि रह जाती है तो जिस क्रिया से दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाती है उसे एकवर्णशोधन कहते हैं और जैसे पूर्व दो समीकरणों में एक वर्ण शोधन से य और र दोनों अव्यक्तराशियों के मान निकल आये हैं वैसे ही सरूप के जो कोई और दो समीकरण हों और उनमें प्रत्येक समीकरण की समता अव्यक्त राशियों के एकही मान रखने से बनी रहे तो एक वर्ण

शोधन से दोनों अव्यक्त राशियों का मान निकल आवेगा परन्तु एक वर्ण शोधन की सुगम रीति बतलाते हैं। जैसे

॥ उदाहरण ॥

(१) २य + ३र = २० } इष्ट समीकरण हों
और २य − ३र = ८ }

तो तुल्य राशियों का योग करने से

४य = २८ ∴ ४ का भाग देने से य = $\frac{२८}{४}$ = ७

ऐसे ही तुल्य राशियों का अन्तर करने से

६र = १२ ∴ ६ का भाग देने से र = $\frac{१२}{६}$ = २

(२) २य + र = १६ } इष्ट समीकरण हैं इनमें य
३य + २र = २५ } और र राशियों का मान बताओ

पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो

४य + २र = ३२ इसके नीचे दूसरे समीकरण को लिखा ३य + २र = २५

अन्तर करने से य = ७ और पहले समीकरण में पक्षान्तरनयन से र = १६ − २य

= १६ − २ × ७

= १६ − १४

= २

(३) २य + ३र = २० } समीकरण हैं इनमें य और
३य + २र = २५ } र राशियों का मान बताओ

पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो

४य + ६र = ४० दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को ३ से गुणा करो तो ९य + ६र = ७५ इस समीकरण में से ऊपर के समीकरण को घटाया तो ५य = ३५

इसलिये ५ का भाग देने से य = $\frac{३५}{५}$ = ७
और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से
२ र = २५ − ३ य = २५ − ३ × ७ = २५ − २१ = ४
इसलिये २ का भाग देने से र = $\frac{४}{२}$ = २

जिस रूप के ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं वैसेही रूप के और जो दो भिन्न समीकरण हों वा ऐसे दो समीकरण हों कि जो उन पर पूर्व रीतियों से क्रिया करें तो उन के रूप ऊपर के उदाहरणों के समीकरणोंके रूप के सम होजांय तो जिन रीतियों से पूर्व उदाहरण के समीकरणों में य और र अव्यक्त राशियों का मान मिलगया है उन्हीं रीतों से इष्ट दो समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा उन रीतियों का यही आशय है कि इष्ट दो समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना चाहिये जिसमे केवल एक राशि अव्यक्त रह जाय और दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाय इसके लिये रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

देखो कि दोनों समीकरण में किस अव्यक्त राशि के गुण छोटे हैं और जो य राशि के गुण छोटे हों तो य राशि का गुण जो एक समीकरण में हो उस से दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो और ऐसेही जो य राशि का गुण दूसरे समीकरण में हो उससे पहले समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो फिर देखो कि इस क्रिया करने से जो दो नये समीकरण उत्पन्न हों उन का योग वा अन्तर करने से य राशि मिट जायगी और

एक ऐसा समीकरण रहजायगा कि उसमें केवल र अ
व्यक्त राशि रहेगी और जो र राशि के गुण छोटे हों तो पू
र्व क्रिया से र राशि को शोधन करो और जिस अव्यक्त राशि
के गुण छोटे होते हैं उनसे दोनों समीकरण को पृथक् २
गुणते हैं इसका यह कारण है कि इस रीति से थोड़ा गुणा क
रना पड़ता है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) २य + १६र = ४८ } और ५य − १३र = ६७ } तो य और र का मान क०

पहले समीकरण प्रत्येक पद को ५ से गुणा करो और दू
सरे समीकरण प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो

१०य + ८०र = २४०
और १०य − २६र = १३४
अन्तर करनेसे १०६र = १०६
∴ र = १

और पहले समीकरण में पक्षांतरानयन से
२य = ४८ − १६य = ४८ − १६ × १ = ४८ − १६ = ३२
२ का भाग देने से य = १६

य और र अव्यक्त राशियों के मानों की सत्यता देखने के
लिये उन्हें पूर्व समीकरणोंमें रक्खा तो
२य + १६र = २ × १६ + १६ × १ = ३२ + १६ = ४८
और ५य − १३र = ५ × १६ − १३ × १ = ८० − १३ = ६७

(२) ७य − ८र = ३ } और १३य + ५र = ८५ } तो य और र का मान बताओ

इन समीकरणों में र राशि के गुण छोटे हैं इसलिये प

इस समी करण को दूसरे समी करण की र राशि के गुण ५ से गुना और दूसरे समी करण को पहले समी करण की र राशि के गुण ८ से गुना तो

$$३५ य - ४० र = १५$$

$$और \quad १०४ य + ४० र = ६८०$$

योग करने से १३९ य = ६९५

१३९ का भाग देने से $\quad य = \frac{६९५}{१३९} = ५$

और पहले समी करण में ८ र = ७ य - ३

पक्षान्तरानयन से $\quad = ७ \times ५ - ३$

$$= ३५ - ३$$

$$= ३२$$

इसलिये ८ का भाग देने से $र = \frac{३२}{८} = ४$

य और र अव्यक्त राशियों के मान जो निकले हैं उनकी सत्यता देखने के लिये परीक्षा करते हैं ॥

$$७य - ८र = ७ \times ५ - ८ \times ४ = ३५ - ३२ = ३$$

$$और \quad १३य + ५र = १३ \times ५ + ५ \times ४ = ६५ + २० = ८५$$

जो समीकरणों में अव्यक्त राशियों के गुण बड़े अंक हों तो अव्यक्त राशियों के मान सुगम रीति से निकालना बतलाते हैं ॥ जैसे

॥ उदाहरण ॥

(२) २६ य + २३ र = ९७ और १४ य - १२ र = १८ } तो य और र का मान बताओ

२६ और १४ का १८२ लघु समापवर्त्य है और इसमें २६ पूरा ७ बार जाता है और १४ पूरा ८ बार जाता है तो पहले समी करण को ७ से गुणा और दूसरे समीकरण को ८ से गुणा

इसलिये $११२य + १६१र = ६५८$

$११२य - ९६र = १४४$

अन्तर करने से $२५७र = ५१४$

२५७ का भाग देने से $र = \frac{५१४}{२५७} = २$

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

$१४य = १२र + १८ = १२ \times २ + १८ = २४ + १८ = ४२$

१४ का भाग देने से $य = \frac{४२}{१४} = ३$

(२) $५४य - १२१र = १५$ } य और र का मान बताओ
और $३६य - ७७र = २१$ }

५४ और ३६ का २१६ लघु समापवर्त्य है और इसमें ५४ का पूरा ४ वार भाग लगता है और ३६ का पूरा ६ वार भाग लगता है इस लिये पहले समीकरण को ४से गुणा किया और दूसरे समीकरण को ६से गुणा किया तो

$२१६य - ४८४र = ६०$
$२१६य - ४६२र = १२६$

अन्तर करने से $२२र = ६६$

२२ का भाग देने से $र = \frac{६६}{२२} = ३$

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

$३६य = २१ + ७७र = २१ + ७७ \times ३ = २१ + २३१ = २५२$

३६ का भाग देने से $य = \frac{२५२}{३६} = ७$

॥ प्रश्न १ ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र का मान बताओ

(१) $य + र = १७$, $२य - र = १९$

(२) $४य - ७र = २६$, $४य + ५र = ५०$

$$२य + २र = ३य - ३र + १०$$

पक्षान्तरानयन से $५र - य = १०$ यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ॥

दूसरे समीकरण में छेद दूर करने से

$$२य - र = ८र - ४य + ३$$

पक्षान्तरानयन से $६य - ९र = ३$

३ का भाग देने से $२य - ३र = १$ यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ॥

इसलिये दोनों लघुतम रूप समीकरणों को लिखा तो

$$\left.\begin{array}{r} ५र - य = १० \\ \text{और}\quad २य - ३र = १ \end{array}\right\}$$

इन में पहले समीकरण को २ से गुणा करो तो

$$१०र - २य = २०$$

और दूसरे समीकरण को रक्खा $२य - ३र = १$

योग करने से $७र = २१$

७ का भाग देने से $र = \frac{२१}{७} = ३$

और पहले लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$य = ५र - १० = ५ \times ३ - १० = १५ - १० = ५$$

(२) $\left.\begin{array}{l} \frac{२य - र}{३} + ६ = \frac{३र - य}{२} + \frac{९}{२} \\ \text{और}\quad \frac{२य + र}{५} + १ = \frac{३र + य + १२}{१०} \end{array}\right\}$ य और र का मान बताओ

छेदगम के अर्थ पहले समीकरण को ६ से गुणा करो

तो $४य - २र + ३६ = ९र - ३य + २७$

पक्षान्तरानयन से $४य + ३य - २र - ९र = २७ - ३६$

योग करने से ७य−८र=−६ यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

छेदगम के अर्थ दूसरे समीकरण को १० से गुणा करो तो

$$६य+२र+१०=३र+य+१३$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से ५य−र=३ यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दोनों लघुतम रूप समीकरणों को एक स्थान में इकट्ठा रक्खा

$$\left.\begin{aligned} ७य-८र &= -६ \\ \text{और } ५य-र &= ३ \end{aligned}\right\}$$

इन में पिछले समीकरण को ८ से गुणा तो

$$४०य-८र=२४$$

और पहले समीकरण को रक्खा

$$७य-८र=-६$$

अन्तर करने से $३३य=३३$

३३ का भाग देने से $य=\frac{३३}{३३}=१$

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$र=५य-३=५\times१-३=५-३=२$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{३य-५र}{२}+३ &= \frac{२य+र}{५} \\ \text{और } ८-\frac{य-२र}{४} &= \frac{य}{२}+\frac{र}{३} \end{aligned}\right\} \text{य और र का मान बताओ}$$

छेदगम के लिये पहले समीकरण को १० से गुणा किया तो

$$१५य-२५र+३०=४य+२र$$

पक्षांतरानयन और योग करने से

$११य - २७र = -३०$ प्रथम लघुतम रूप समीकरण हुआ छेदगम के लिये दूसरे समीकरण को १२ से गुणा किया तो $९६ - ३ + ६र = ६ + ४र$ पक्षान्तरानयन और योग करने से $९६ = ९ - २र$ दूसरा लघुतम रूप समीकरण हुआ ॥

प्रथम लघुतम रूप समीकरण को ९ से गुणा किया तो

$$९९य - २४३र = -२७०$$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण को ११ से गुणा किया तो

$$९९य - २२र = १०५६$$

अन्तर करने से $२२१र = १३२६$

२२१ का भाग देने से $र = \frac{१३२६}{२२१} = ६$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$९य = ९६ + २र = ९६ + २ \times ६ = ९६ + १२ = १०८$

९ का भाग देने से $य = \frac{१०८}{९} = १२$

॥ २ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र अव्यक्त राशियों का मान निकालो

(१)
$$\left.\begin{array}{l} ३(४य - ५र) = २(य + र) + ३ \\ ४(३य - २र) = ५(य - र) + ११ \end{array}\right\}$$

(२)
$$\left.\begin{array}{l} ३य + \frac{र}{३} = ३६ \\ \frac{६र - २य}{४} = ८ \end{array}\right\}$$

(३) $\frac{३य - २र}{२} - ३ = \frac{२य - र}{४}$

$\frac{५य - ४र}{२} - ३ = \frac{४य - ३र}{३}$

(४) $\frac{२य - ३}{२} + र = ७$

$५य - १३र = ३३\frac{१}{२}$

(५) $\frac{य + ३}{र} = \frac{१}{३}$

$\frac{य}{र - १} = \frac{१}{५}$

(६) $\frac{य}{८} + \frac{र}{९} = ४२$

$\frac{य}{९} + \frac{र}{८} = ४३$

(७) $\frac{य}{६} + \frac{र}{११} = २६$

$\frac{य}{२} - \frac{र}{७} = ४६$

(८) $\frac{१}{२}(य + र) = \frac{१}{३}(२य + ४)$

$\frac{१}{३}(य - र) = \frac{१}{२}(य - २४)$

(२१) $\left.\begin{array}{l}\frac{१}{७}(य+२)+\frac{१}{४}(र-य)=२य-८\\ \frac{१}{३}(२र-३य)+\frac{१}{५}(८य+६र-७)३य+४\end{array}\right\}$

(२२) $\left.\begin{array}{l}\frac{१}{३}(३य-७र)=\frac{१}{५}(२य+र+१)\\ ८-\frac{१}{५}(य-र)=६\end{array}\right\}$

(२३) $\left.\begin{array}{l}\frac{य-२}{५}-\frac{१०-य}{३}=\frac{र-१०}{४}\\ \frac{२र+४}{३}-\frac{२य+र}{८}=\frac{य+१३}{४}\end{array}\right\}$

(२४) $\left.\begin{array}{l}\frac{२य+र}{५}+\frac{७र+६य+११}{१८}=२\frac{१}{२}-\frac{५य-१७}{६}\\ \frac{३}{७}(५य+३र+२)=\frac{१}{२}-(६र+६)\end{array}\right\}$

॥ दो वर्णैक घातसमीकरणसम्बन्धीप्रश्न ॥

(१) दो संख्याओं का योग २६ है और जो बड़ी संख्या के आधे में छोटी संख्या का तृतीयांश जोड़ाजाय तो योग ११ के तुल्य होता है तो बतलाओ कि वे कौनसी २ संख्या हैं ॥

कल्पना करो कि य और र इष्टराशि हैं तो प्रश्न के अनुसार य + र = २६ और कल्पना करो य राशि बड़ी है तो इसका आधा $\frac{य}{२}$ हुआ और दूसरी राशि का तृतीयांश $\frac{र}{३}$ हुआ इस लिये प्रश्न के

अनुसार $\frac{य}{२} + \frac{र}{३} = ११$

तो $\left.\begin{array}{l} य + र = २६ \\ \frac{य}{२} + \frac{र}{३} = ११ \end{array}\right\}$

इन दो समीकरणों से य और र अव्यक्त राशियों का मान निकालने से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

दूसरे समीकरण को ६से गुणा करो तो $३य + २र = ६६$
पहले समीकरण को २से गुणा करो तो $२य + २र = ५२$

अंतर करने से $य = १४$

और पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से
$र = २६ - य = २६ - १४ = १२$ इस लिये १४ और १२ इष्ट संख्या हुई

इन की सत्यता दिखाते हैं $१४ + १२ = २६$

$\frac{१४}{२} + \frac{१२}{३} = ७ + ४ = ११$

इस प्रश्न के उत्तर निकालने में य और र दो अव्यक्त राशियों से दो समीकरण बनाने की कुछ आवश्यकता नहीं है केवल एक वर्ण समीकरण के उपक्रम करने से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

कल्पना करो कि इष्ट संख्याओं में य संख्या बड़ी है तो प्रश्न के अनुसार २६—य दूसरी संख्या होगी और $\frac{य}{२}$ बड़ी राशि का आधा हुआ और $\frac{२६-य}{३}$ यह छोटी राशि का तृतीयांश हुआ इसलिये प्रश्न के अनुसार $\frac{य}{२} + \frac{२६-य}{३} = ११$ यह एक घात एकवर्ण समीकरण है ॥

६ से गुणा किया तो ३य + ५२ − २य = ६६

पक्षान्तरानयन और योग करने से य = १४ यह १ संख्या हुई

और २६ − १४ = १२ यह दूसरी संख्या हुई

(२) मेरे पास आने और पाइयां मिलकर १॥-) के समान हैं और जो मेरे पास जितने आने हैं उतनी पाइयां होतीं और जितनी मेरे पास पाइयां हैं उतने आने होते तो मेरे पास आने और पाइयां मिलकर |||=) के समान होते तो बतलाओ कि मेरे पास कितने आने हैं और कितनी पाइयां ॥

कल्पना करो कि य आनों की संख्या है

और र पाइयों की संख्या है

तो य आने = १२य पाइयां

और १॥-) = ३०० पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार १२य + र = ३०० प्रथम समीकरण

र आने = १२र पाइयां

|||=) = १६८ पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार १२र + य = १६८

प्रथम समीकरण को १२ से गुणा किया तो १४४य + १२र = ३६००

इस समीकरण में से इस के ऊपर जो समीकरण लिखा है उसे घटाया तो १४३य = ३४३२

१४३ का भाग देने से य = ३४३२/१४३

= २४ यह आनों की संख्या हुई

और प्रथम समीकरण में पक्षान्तरानयन

से र = ३०० − १२य = ३०० − १२×२४

= ३०० — २८८ = १२ यह
पाइयों की संख्या हुई॥

अब देखो कि अव्यक्त राशियों का मान ठीक है वा नहीं
क्योंकि १२ पाइयां = १ आना
और २४ आने = १ रुपया और ८ आने
इस लिये सर्व धन = १ रुपया और ८ आने
और २४ पाइयां = २ आने
और १२ आने = १२ आने
इस लिये दोनों मिलकर = १४ आने

(३) ७ वर्ष आगे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से ४ गुनी थी परंतु ७ वर्ष उपरान्त पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से दूनी रह जायगी तो बतलाओ कि हाल में हर एक मनुष्य की क्या अवस्था है॥

कल्पना करो कि य लड़के की अवस्था है॥
और र बाप की अवस्था है
तो य−७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पहले
र−७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पहले
य+७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पीछे
र+ ७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पीछे

प्रश्न के अनुसार र−७ = ४(य−७) और र+७ = २(य+७) } इन सभी करणों से य और र का मान निकालो

कोष्ठ को दूर करने से र−७ = ४य−२८
और र+७ = २य+१४
अन्तर करने से −१४ = २य−४२
पक्षान्तरानयन से २य = ४२−१४ = २८

२ का भाग देने से य = $\frac{२८}{२}$ = १४ यह लड़के की अवस्था है और पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से
र = ७+४(य−७) = ७+४(१४−७) = ७+४×७ = ७ + २८ = ३५ इस लिये ३५ वर्ष की अवस्था बाप की हुई

(४) मेरे पास दुपट्टे में रुपये और चौअन्नियां बँधी हैं और जितने मेरे पास रुपये हैं उन से जो दूने मेरे पास रुपये होते और जितनी चौअन्नियां हैं उन से आधी चौअन्नियां होतीं तो मेरे पास २४ $\frac{१}{४}$ रुपये सर्व धन होता परंतु जितने मेरे पास रुपये हैं उन से आधे रुपये होते और जितनी चौअन्नियां हैं उन से दो गुनी चौअन्नियां होतीं तो मेरे पास ७ सर्व धन होता तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रुपये हैं और कितनी चौअन्नियां।

कल्पना करो कि मेरे पास य रुपये हैं
और र चौअन्नियां हैं

तो २य रुपये = ४×२य चौअन्नियां
= ८य चौअन्नियां

और $\frac{र}{२}$ चौअन्नियां = $\frac{र}{२}$ चौअन्नियां

और २४ $\frac{१}{४}$ रुपये = ४×२४ $\frac{१}{४}$ चौअन्नियां
= ९७ चौअन्नियां

इस लिये प्रश्न के अनुसार ८य + $\frac{र}{२}$ = ९७

२ से गुणा करने से १६य + र = १९४ प्रथम समीकरण

$\frac{य}{२}$ रुपये = ४×$\frac{य}{२}$ चौअन्नियां = २य चौअन्नियां

और २र चौअन्नियां = २र चौअन्नियां

और ७ रुपये = ४×७ वा २८ चौअन्नियां

इस प्रश्न के अनुसार २य + २र = २८॥

२ का भाग देने से य + र = १४ दूसरा समीकरण
और प्रथम समीकरण में १६ य + र = १९४
अन्तर करने से १५ य = १८०
१५ का भाग देने से य = $\frac{१८०}{१५}$ = १२ यह रुपयों की संख्या हुई
और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से
र = १४ − य = १४ − १२ = २ यह चोअन्नियों की संख्या हुई ॥

(५) एक कुंजड़न ने सन्तरे मोल लिये और उन के जवरा म चुकाये तो उसने बराबर रुपये और बराबर आने दिये और जितने रुपये और जितने आने दिये उन दोनों संख्याओं के योग के समान कोड़ी सन्तरे खरीदे तो बतलाओ कि एक कोड़ी सन्तरों के क्या दाम हुए ॥

कल्पना करो कि उस ने १ कोड़ी सन्तरे मोल लिये तो प्रश्न के अनुसार कोड़ी की संख्या १ के दो तुल्य खंड वा $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{२}$ रुपये और आनों की संख्या होगी क्यों कि $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{२}$ = १ और $\frac{१}{२}$ रुपया = ८ आने और $\frac{१}{२}$ आना = ६ पाई इस कारण १ कोड़ी सन्तरों के दाम ८ $\frac{१}{२}$ आने वा ८ आने और ६ पाई हुई ॥

॥ दूसरी रीति से ॥

कल्पना करो कि १ कोड़ी के दाम य आने हैं और सन्तरों के दाम में उसने जितने रुपये दिये उन की संख्या र है और जितने आने दिये उन की भी संख्या र है तो प्रश्न के अनुसार उसने २ र कोड़ी सन्तरे खरीदे होंगे और १ कोड़ी सन्तरों के दाम य आने माने हैं इस लिये २ र कोड़ी सन्तरों के दाम २ र य वा २ य र आने होंगे परंतु प्रश्न के अनुसार सब सन्तरों का मोल र रुपये और र आने हैं और र रुपये = १६ र आने इस लिये र रुपये + र आने = १६ र आने + र आने = १७ र आने

परंतु सन्तरों का एक ही मोल होगा इस कारण

२ य र = १७ र

२ र का भाग देने से य = $\frac{१७र}{२र}$ = $\frac{१७}{२}$ = ८$\frac{१}{२}$ आने = ८ आने और ६ पाई॥

यह २ कोड़ी सन्तरों के दाम हुए॥

इस उदाहरण से यह जान पड़ा कि ऐसे प्रश्नों में दो अव्यक्त राशि कल्पना करने से एक अव्यक्त राशि का मान सहज में निकल आवेगा और ऊपर के उदाहरण में केवल एक ही समीकरण बना और दूसरी अव्यक्त राशि भाग देने से समीकरण में से निकल गई॥

॥ तीसरी रीति ॥

कल्पना करो कि एक कोड़ी सन्तरों के य आने दाम हैं और य रुपये और यही आने सब सन्तरों के दाम हैं वा सन्तरों के दाम = य रुपये + य आने॥

= १६ य आने + य आने।

= १७ य आने।

और प्रश्न के अनुसार य + य वा २य सन्तरों की कोड़ियों की संख्या हुई॥

॥ त्रैराशिक से ॥

य कोड़ी सन्तरे : १७य आने : : १ कोड़ी सन्तरे : $\frac{१७य}{२य}$ और $\frac{१७य}{२य}$ = $\frac{१७}{२}$ = ८$\frac{१}{२}$ आने ये एक कोड़ी सन्तरों के दाम हुए॥

(६) एक ऐसा भिन्न है कि जो उस के अंश में १ जोड़ दो तो भिन्न का मान १ होगा और जो हर में १ जोड़ दो तो भिन्न $\frac{१}{२}$ के तुल्य होगा तो बतलाओ कि वह कौन सा भिन्न है कल्पना करो कि $\frac{य}{र}$ इष्ट भिन्न है इस के अंश में १ जोड़ दिया तो $\frac{य+१}{र}$

यह भिन्न का रूप हो गया ॥

और प्रश्न के अनुसार $\frac{य+१}{र}=१$ ॥

र से गुणा करने से य+१=र प्रथम समीकरण $\frac{य}{र}$ भिन्न के हर में २ जोड़ा तो $\frac{य}{र+२}$ यह भिन्न का रूप हो गया। प्रश्न के अनुसार $\frac{य}{र+२}=\frac{१}{२}$ ॥

२ (र+२) से गुणा किया तो २य=र+२ दूसरा समीकरण परंतु प्रथम समीकरण में र=य+१ इस लिये र के इस मान को दूसरे समीकरण में स्थापन किया ॥

तो २य=य+१+२=य+३ शोधन करने से

य=३ और र=य+१=३+१=४

इस लिये $\frac{य}{र}=\frac{३}{४}$ यह इष्ट भिन्न हुआ।

(७) दो अंकों की एक ऐसी संख्या है कि वह दोनों अंकों के योग से ४ गुनी है और जो उन दोनों अंकों की स्थान बदलकर रक्खो तो यह जो संख्या बनेगी वह पूर्व दूनी संख्या से १२ के समान छोटी होगी तो बतलाओ कि पहली कौन सी संख्या है ॥

कल्पना करो कि इष्ट संख्या का य दस स्थानीय अंक है और र एक स्थानीय अंक है

तो जैसे २३=२०+३ वैसे ही १०य+र इष्ट संख्या है।

इस लिये प्रश्न के अनुसार १०य+र=४(य+र)

=४य+४र

पक्षान्तरानयन से १०य−४य=४र−र

योग करने से ६य=३र

३ का भाग देने से २य=र प्रथम समीकरण।

और जो अंकों को बदल कर रक्खें तो १०र+य वह दूसरी संख्या हुई

प्रश्न के अनुसार $१०र + य = २(१०य + र) - २२$
$= २०य + २र - २२$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $१९य - ८र = २२$

प्रथम समीकरण में $र = २य \therefore -८र = -१६य$

इस मान को ऊपर के समीकरण में रक्खा तो

$१९य - १६य = २२$

योग करने से $३य = १२$

३ का भाग देने से $य = \frac{१२}{३} = ४$ और $र = २य = २ \times ४ = ८$ इस लिये ४८ इष्ट संख्या हुई ॥

(८) शाहजहांपुर में एक बज़ाज़ने २० रुपये की रुई लेकर उसे बहुत अच्छी धुनकवा के बहुत महीन कतवाई और आधे सूत की तो बड़े मोल के चिल्ले लगवा कर सुगढ़ पगड़ियां बुनवाईं और आधे सूत की बारीक मलमल और इस सब माल को अंकवाया तो ६५४ रुपयों का ठहरा और दूसरे बज़ाज़ने भी २० ही रुपयों की रुई मोल लेकर अच्छा सूत कतवाकर तिहाई के सूत की तो मलमल बुनवाई और दो तिहाई सूत की कीमती पगड़ियां तो इसने जब अपना माल अंकवाया तो पहले बज़ाज़ के माल के दामों से ३० रुपये बढ़ती का ठहरा तो अब बतलाओ कि एक रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी होगी सब लागत और नफ़ा मिल कर उस के अब कितने दाम हो गये॥

और १ रुपये की रुई जो मलमल बुनाने में लगी होगी उसके कितने दाम हो गये॥

कल्पना करो कि १ रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी हो उसमें सब लागत और नफ़ा गिनकर उसके दाम

य रुपये हो गये और १ रुपये की रुई जो मलमल में लगी हो उस में सब लागत और नफ़ा गिन कर उस के दाम र रुपये हो गये॥

तो प्रश्न के अनुसार पहले बज़ाज़ ने तो ५) की रुई की तो पगड़ियां बुनवाई और ५) की रुई की मलमल और सब मिलाकर ५४५) का अंका॥ वा

५य + ५र = ५४५ प्रथम समीकरण और

दूसरे बज़ाज़ने २०) की रुई की तिहाई वा $\frac{२०}{३}$ रुपये की रुई की मलमल बुनवाई और २०) की रुई की दो तिहाई वा $\frac{४०}{३}$ रुपये की रुई की पगड़ियां बुनवाई॥

इस लिये प्रश्न के अनुसार

$\frac{४०}{३}$य + $\frac{२०}{३}$र = ५४५ + ३०

३ का गुणा करने से २०य + १०र = २५७२ दूसरा समीकरण

प्रथम समीकरण को २ से गुणा तो १०य + १०र = ८८८

इस दूसरे समीकरण में से घटाया तो १०य = ५३४

१० का भाग देने से य = ५३ $\frac{२}{५}$ = ५३।=) ४ $\frac{४}{५}$ पाई॥

पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से

५र = ५४५ − ५य = ५४५ − ५ × ५३ $\frac{२}{५}$ = ५४५
− २६७ = २७८

५ का भाग देने से र = $\frac{२७८}{५}$ = ५५ $\frac{३}{५}$ = ५५।=) ९ $\frac{३}{५}$ पाई॥

॥ अब इन मानों की सत्यता दिखाते हैं॥

५र + ५य = ५ × ५५ $\frac{३}{५}$ + ५ × ५३ $\frac{२}{५}$ = २७८ + २६७
= ५४५ रुपये॥

॥ ३ अभ्यास के लिये प्रश्न॥

(१) गुलाब ने शिवदीन से कहा कि जो तुम मुझे

अपनी २० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुमसे दो गुनी गोलियां हो जांय और शिवदीन ने गुलाब से कहा कि जो तुम मुझे अपनी २० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुम से तीन गुनी गोलियां हो जांय तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य के पास कितनी २ गोलियां हैं ॥

(२) एक मनुष्य के पास दो बटुओं में रुपये हैं और जब उसने १० रुपयों में से ५) एक बटुवे में रख दिये और ५) दूसरे बटुवे में रक्खे तो पहले बटुवे के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से दूने होगये परंतु जो वह दसों रुपये पहले बटुवे में रख देता तो उस में के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से तीन गुने हो जाते तो बतलाओ कि हर एक बटुवे में कितने रुपये होंगे ॥

(३) ११ मनुष्यों में ६ पुरुष और ५ स्त्री हों इस परिमाण से एक मण्डली में पुरुष और स्त्रियां हैं परंतु उन में से २ पुरुष जाते रहे और दो स्त्रियां और आगईं तो बतलाओ कि पुरुष और स्त्रियां बराबर हो गईं अब उस मण्डली में कितने पुरुष और कितनी स्त्रियां थीं ॥

(४) एक दयावान मनुष्य ने ६॥=) को कंगले पुरुष और विधवाओं में बांटने का विचार किया और जब उसने हिसाब लगाया तो मालूम हुआ कि जो वह हर एक पुरुष और विधवा को तीन २ आने दे तो उस के पास सवा पुन्यार्थ रुपये और आनों में से १ आना बच रहेगा और जो वह हर एक पुरुष को =) २ पाई दे और हर एक विधवा को =) ६ पाई दे तो उस के पास बांट के ६ पाई बच रहेंगी तो बतलाओ कि कितने कंगले पुरुष थे और

कितनी विधवा थी ॥

(५) एक ऐसा भिन्न है कि जो उसके अंश और हर दोनों में से २ घटावें तो भिन्न का मान $\frac{2}{3}$ हो जायगा और जो अंश में से २ घटावें और हर में २ जोड़ दें तो भिन्न का मान $\frac{1}{2}$ हो जायगा तो बतलाओ कि कौन सा भिन्न है

(६) ऐसा कौनसा भिन्न है कि उस के अंश और हर का दूना योग उनके तिगुने अन्तर के तुल्य हो ॥

(७) ऐसी दो संख्या कौनसी हैं कि उन में एक संख्या जितनी १० से अधिक है उतनी ही दूसरी संख्या १० से छोटी है और उन दोनों संख्याओं का दशांश योग उन के चतुर्थांश अन्तर की तुल्य है तो बतलाओ कि वे संख्या कौन सी हैं ॥

(८) ऐसी दो संख्या कौनसी हैं कि जो एक संख्या के आधे में दूसरी संख्या का तिहाई जोड़ें तो योग १२ के तुल्य हो जाय परन्तु जो पहली संख्या की तिहाई में दूसरी संख्या का आधा जोड़ दें तो योग १३ के तुल्य होजाय॥

(९) एक मनुष्य के पास दो बर्त्तनों में घी भरा था तो उसने प्रथम पहले बर्त्तन में से दूसरे बर्त्तन में इतना घी उंडेला जितना घी दूसरे बर्त्तन में भरा था फिर इसी तरह उसने दूसरी बेर दूसरे बर्त्तन में से पहले बर्त्तन में इतना घी उंडेला जितना घी कि पहली दफ़ा पहले बर्त्तन में से दूसरे बर्त्तन में घी उंडेले पीछे पहले बर्त्तन में बच रहा था और फिर तीसरी बेर उसने पहले बर्त्तन से दूसरे बर्त्तन में इतना घी उंडेला जितना घी कि दूसरी दफ़ा के दूसरे बर्त्तन में घी रह गया था तो अब दोनों

वर्त्तनों में बराबर आठ २ सेर घी हो गया बतलाओ कि पहले ही पहल दोनों वर्त्तनों में कितना २ घी था॥

(२०) एक संवत् है कि उस के तीन वर्ष पीछे यूरोप खंड के पोर्तुगाल देश में लिसवन नाम नगर भूचाल से नष्ट हो गया और उस संवत् की संख्या के अंकों में यह संबंध है कि सहस्त्र के स्थान में तो अंक २ है और शत स्थानीय अंक, दश स्थानीय और एक स्थानीय अंकों के योग के तुल्य है और दश स्थानीय अंक, चारों स्थानों के अंकों के तृतीयांश योग के तुल्य है और एक स्थानीय अंक, सहस्त्र स्थानीय और शत स्थानीय अंकों के चतुर्थांश योग के तुल्य है तो बतलाओ कि लिसबन नगर किस संवत में नष्ट हुआ॥

॥ घात क्रिया और मूल क्रिया॥

९७ परिभाषा जब एक राशि को उसी राशि से एक बार वा कई बार गुणा करें तो गुणन फल को पूर्व राशि का घात कहते हैं और गुणा करने में जितने बार राशि गुणक रूप अवयव के स्वरूप में आवे उस संख्या को उस घात का घात प्रकाशक कहते हैं॥ जैसे अ × अ वा अ² इस से अ का दूसरा घात जाना जाता है और गुणन करने में अ दो बार आवेगा ऐसे ही और जानो॥

इस लिये गुणा करने में और घात क्रिया में कुछ अन्तर नहीं है और इस कारण जो रीतियां गुणा करने के लिये लिख चुके हैं वे घात क्रिया के लिये भी

अवश्य होंगी और याद रक्खो कि घात क्रिया में गुण्य और गुणक तुल्य होते हैं ॥

॥ घात क्रिया में जो उपयोगी रीति हैं उन्हें लिखते हैं ॥

॥ प्रथम रीति ॥

एक अक्षर की राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो उस के घात प्रकाशक को दूना कर दो। जैसे

अ वा $अ^{१}$ का वर्ग $अ^{२}$ है

$अ^{२}$ का वर्ग $अ^{४}$ है क्योंकि $अ^{२} \times अ^{२} = अ^{२+२} = अ^{४}$

$अ^{३}$ का वर्ग $अ^{६}$ है क्योंकि $अ^{३} \times अ^{३} = अ^{३+३} = अ^{६}$

ऐसे ही और जानो ॥

॥ दूसरी रीति ॥

जो किसी घात वा दो गुणक रूप अवयवों की एक राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो हर एक गुणक रूप अवयव का वर्ग करलो तो इन वर्गों का घात इष्ट राशि के वर्ग के तुल्य होगा ॥

अ क का वर्ग $अ^{२} क^{२}$ है क्योंकि $अक \times अक = अकअक = अ अ क क = अ^{२} क^{२}$ ॥

$अ^{२} क$ इस का वर्ग $अ^{४} क^{२}$ है क्योंकि $अ^{२}क \times अ^{२}क = अ^{२}क अ^{२}क = अ^{२} अ^{२} कक = अ^{४} क^{२}$ ॥

$अ क^{२}$ इस का वर्ग $अ^{२} क^{४}$ है क्योंकि $अक^{२} \times अक^{२} = अक^{२} अक^{२} = अ अ क^{२} क^{२} = अ^{२} क^{४}$ ॥

॥ ऐसे ही और जानो।

इसी रीति से ३ य र का वर्ग = ३यर × ३यर = ३ × ३

+ २४ मक्कन ॥ ± ५ मक्कम ॥

य य र र = $९य^२र^२$ ॥

और २ अ क ग का वर्ग = ४ $अ^२क^२ग^२$ ॥

ऐसे ही जो किसी राशि में और अधिक गुणकरूप अवयव हों तो उन का जुदा २ वर्ग करके इन वर्गों को गुणा करलो ॥

॥ तीसरी रीति ॥

जो भिन्न का वर्ग करना हो तो उस के अंश और हर दोनों का जुदा २ वर्ग करलो ॥ जैसे

$\frac{अ}{क}$ इस का वर्ग $\frac{अ^२}{क^२}$ है क्योंकि $\frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अ अ}{क क} = \frac{अ^२}{क^२}$

$\frac{अक}{गघ}$ इस का वर्ग $\frac{अ^२क^२}{ग^२घ^२}$ है क्योंकि $\frac{अक}{गघ} \times \frac{अक}{गघ} = \frac{अक}{गघ}$

$\frac{अक}{गघ} = \frac{अ^२क^२}{ग^२घ^२}$ ॥

$\frac{२य}{३र}$ इस का वर्ग $\frac{४य^२}{९र^२}$ है ऐसे ही जो और कोई भिन्न हो तो उस का वर्ग करलो ॥

॥ चौथी रीति ॥

जो दो पद की राशि हों और दोनों पद धन हों तो उस राशि के वर्ग करने की यह रीति है कि हर एक पद का जुदा २ वर्ग कर के उन वर्गों को जोड़ दो और इस योग में दोनों पदों के दूने घात को मिला दो ॥

॥ कारण यह है ॥

अ + क इस का वर्ग $अ^२ + क^२ + २अक$ है ॥

अर्थात् अ का वर्ग + क का वर्ग + अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

* ४० प्रक्रम + ४ प्रक्रम * २३ प्रक्रम का चौथा उदाहरण

॥ पांचवीं रीति ॥

जो दो पद की राशि में एक पद ऋण हो और उस राशि का वर्ग करना हो तो हर एक पद का जुदा २ वर्ग करके उन के योग में से दोनों पदों की दूनी घात को घटा दो कारण यह है $(\text{अ}-\text{क})$ इस का वर्ग $\text{अ}^2+\text{क}^2-2\,\text{अक}$ है अर्थात अ का वर्ग + क का वर्ग − अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $(\text{१}+\text{य})^2 = \text{१}^2+\text{य}^2+\text{२}\times\text{१}\times\text{य} = \text{१}+\text{य}^2+\text{२य}$ ॥

(२) $(\text{१}-\text{य})^2 = \text{१}^2+\text{य}^2-\text{२}\times\text{१}\times\text{य} = \text{१}+\text{य}^2-\text{२य}$ ॥

(३) $(\text{२}+\text{य})^2 = \text{२}^2+\text{य}^2+\text{२}\times\text{२}\times\text{य} = \text{४}+\text{य}^2+\text{४य}$ ॥

(४) $(\text{२य}-\text{र})^2 = (\text{२य})^2+\text{र}^2-\text{२}\times\text{२य}\times\text{र} = \text{४य}^2+\text{र}^2-\text{४यर}$ ॥

(५) $(\text{२अ}+\text{३क})^2 = (\text{२अ})^2+(\text{३क})^2+\text{२}\times\text{२अ}\times\text{३क} = \text{४अ}^2+\text{९क}^2+\text{१२अक}$ ॥

(६) $(\text{अक}-\text{१})^2 = (\text{अक})^2+\text{१}^2-\text{२}\times\text{अक}\times\text{१} = \text{अ}^2\text{क}^2+\text{१}-\text{२अक}$ ॥

५८ चौथी और पांचवीं जो रीति लिखी हैं उन से बहुतेरे अंकों के वर्ग बिना लिखे केवल मन में विचार करने से निकल आते हैं। जैसे २५ का वर्ग निकालना हो तो २५ = २० + ५ इस लिये २५ का वर्ग = २० + ५ का वर्ग = २० का वर्ग + ५ का वर्ग + २० और ५ का दूना घात = ४०० + २५ + २०० ॥

= ६२५

२५ के वर्ग के निकालने में जो २ क्रिया करनी पड़ी हैं वे सब बिना लिखे मन में केवल विचार से हो सकती हैं

१५ का वर्ग निकालो ॥

२५ का वर्ग = $\overline{२० + ५}$ का वर्ग

= २०२ + ५२ + २ × ५ × २०

= ४०० + २५ + २००

= ६२५

इस वर्ग के निकालने की क्रिया से बड़े अंकों का वर्ग सहज में निकल आता है। जैसे ४९८ का वर्ग करो क्योंकि ४९८ = ५०० − २ ॥

इस लिये ४९८ का वर्ग = ५०० − २ का वर्ग

= ५०० का वर्ग + २ का वर्ग − २ × ५०० × २

= २५०००० + ४ − २०००

= २४८००० + ४

= २४८००४

इस वर्ग को बिना लिखे केवल मन में विचार करने से कर सक्ते हैं॥

५९ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि जो एक पद की राशि का वर्ग करोगे तो वर्ग में भी एक ही पद होगा और जो दो पद की राशि का वर्ग करोगे तो वर्ग में तीन पद होंगे इससे यह बात निकलती है कि दो पद की राशि पूरा वर्ग नहीं हो सक्ती या जो उस का वर्ग मूल ठीक चाहोगे तो न मिलेगा कारण यह है कि जो दो पद की राशि का वर्ग करते हैं तो वर्ग में तीन पद आते हैं और जो केवल एक पद की राशि का वर्ग करते हैं तो उस के वर्ग में भी केवल एक पद होता है इस कारण दो पद की राशि वर्ग करने से नहीं निकल सक्ती है॥

इतना स्मरण रक्खो कि अ × क इस का वर्ग अ२ × क२ है

और अ+क इस का वर्ग $अ^२+क^२$ नहीं परंतु $अ^२+क^२+२अक$ है और अ और क अक्षरों के स्थान में चाहो सो संख्या मान लो॥

॥ ४ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

। नीचे जो राशि लिखी हैं उन का वर्ग निकालो।

(१) ५अब

(२) ५अयर

(३) −७अक

(४) $अक^२ग$

(५) $७अक^२ग^३$

(६) $\frac{अक}{ग}$

(७) $\frac{३अय}{२कर}$

(८) $\frac{अक^२}{२ग}$

(९) $\frac{४अ^२क}{७यर^३}$

(१०) $-\frac{३यर^२}{२य^२}$

(११) $\frac{४}{५अ^२कग^२}$

(१२) अ+१

(१३) अक+१

(१४) य+३

(१५) २−र

(१६) २म−न

(१७) २य−३र

(१८) $य-\frac{प}{२}$

(१९) $य+\frac{३}{२}$

(२०) मय+न

(२१) ३मय−न

(२२) अकग+ग

(२३) ३यर−अ

(२४) $\frac{२}{३}$अक+ग

॥ मूल क्रिया ॥

६० मूल क्रिया बीज घात क्रिया से उलटी होती है और हम इस क्रिया से वह राशि जिस की मूल संज्ञा है निकाल लेते हैं कि जिस पर घात क्रिया होने से इष्ट राशि निकली हो जैसे २५ का वर्ग मूल निकालो इस का यह

अर्थ है कि एक ऐसी संख्या निकालो जिस का वर्ग अ है इस कारण अ^2 का वर्ग मूल अ है क्योंकि अ ऐसी राशि है कि उस का वर्ग अ^2 है। और ऐसे ही और जानो॥

॥ पहली रीति ॥

६१ जो एक पद की राशि का वर्ग मूल निकालना हो तो उस के घात प्रकाशक को आधा करलो जैसे अ^2 इस का वर्ग मूल अ^1 वा अ है क्योंकि $\text{अ} + \text{अ} = \text{अ}^2$ अ^4 इस का वर्ग मूल अ^2 है क्योंकि $\text{अ}^2 + \text{अ}^2 = \text{अ}^4$ ऐसे ही और जानो॥

॥ दूसरी रीति ॥

६२ जो दो गुणक रूप अवयवों के घात का वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणक रूप अवयव का वर्ग मूल जुदा २ निकालो और उन मूल राशियों को गुण दो तो यह घात इस घात का वर्ग मूल होगा॥

इस का वर्ग मूल इस के स्थान में $\sqrt{}$ — यह चिन्ह लिखो॥

॥ उदाहरण ॥

$\text{अक} = \sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}$ क्योंकि $\sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}} \times \sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}} = \sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{क}} = \text{अक}$ कारण यह है कि जो वर्ग मूल से गुणा करोगे तो घात वर्ग के तुल्य होगा॥

$\sqrt{\text{अ}^2\text{क}} = \sqrt{\text{अ}^2}.\sqrt{\text{क}}$ क्योंकि $\sqrt{\text{अ}^2}.\sqrt{\text{क}} \times \sqrt{\text{अ}^2}.\sqrt{\text{क}} = \sqrt{\text{अ}^2}.\sqrt{\text{अ}^2}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{क}} = \text{अ}^2\text{क}$॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस से यह जान पड़ता है कि $\sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}$ इस का वर्ग अक है और इस कारण अक इस का वर्ग मूल $\sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}$ यह है॥

इसी रीति से दो गुणक रूप अवयवों के घातों का भी वर्ग मूल निकल सक्ता है॥

और ऊपर के उदाहरणों के अनुसार यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि जो तीन वा अधिक गुणक रूप अवयवों के घात का वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणक रूप अवयवों का वर्ग मूल जुदा २ निकाल लो और सब मूल राशियों को गुण दो तो यह घात इस घात का वर्ग मूल होगा। जैसे

$\sqrt{अकग} = \sqrt{अ}\cdot\sqrt{क}\cdot\sqrt{ग}$ क्योंकि $\sqrt{अ}\cdot\sqrt{क}\cdot\sqrt{ग}\times\sqrt{अ}\cdot\sqrt{क}\cdot\sqrt{ग} = \sqrt{अ}\cdot\sqrt{अ}\cdot\sqrt{क}\cdot\sqrt{क}\cdot\sqrt{ग}\cdot\sqrt{ग} = अकग$॥

। ऐसे ही और जानो।

॥ तीसरी रीति ॥

६३ जिस भिन्न का वर्ग मूल निकालना हो उस के अंश और हर दोनों का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो ॥ जैसे

$\sqrt{\frac{अ}{क}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$ क्योंकि $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}\times\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} = \frac{\sqrt{अ}\cdot\sqrt{अ}}{\sqrt{क}\cdot\sqrt{क}} = \frac{अ}{क}$ इस से यह जान पड़ता है कि $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$ ऐसी राशि है कि इस का वर्ग $\frac{अ}{क}$ है इस कारण $\frac{अ}{क}$ इस का वर्ग मूल $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$ है॥

॥ उदाहरण ॥

$$\sqrt{\frac{१००}{४९}} = \frac{\sqrt{१००}}{\sqrt{४९}} = \frac{१०}{७} \text{ और } \sqrt{\frac{९अ^२}{४य^२}} = \frac{\sqrt{९अ^२}}{\sqrt{४य^२}} = \frac{३अ}{२य}$$

॥ चौथी रीति ॥

६४ जो तीन पद के पूरे वर्ग का वर्ग मूल निकालना हो तो उन पदों को किसी एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखो अथवा जिस पद में अक्षर का बड़ा घा

न हो उसे पहले लिखो और फिर जिस पद में अक्षर का घात उसके बड़े घात से उतरता हो उसे लिखो तिस पीछे तीसरे पद को लिखो और भाग देने में भी भाज्य और भाजक के पदों को किसी एक अक्षर के घातों के अनुसार लिखते हैं और इष्ट वर्ग के तीनों पद धन हों तो आदि और अंत के पदों का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो इन मूल राशियों का योग इष्ट वर्ग का वर्ग मूल होगा और जो इष्ट पूर्ण वर्ग का मध्य का पद ऋण हो तो आदि और अंत के पदों के वर्ग मूलों का अंतर इष्ट वर्ग के वर्ग मूल के तुल्य होगा ॥ जैसे

$अ^२ + २ अ य + य^२$ इस पूर्ण वर्ग के पद अ अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखे हैं और उस पूर्ण वर्ग का वर्ग मूल $\sqrt{अ^२} + \sqrt{य^२}$ वा $अ + य$ यह है कारण यह है कि जो $अ + य$ इस का वर्ग करें तो यह $अ^२ + २ अ य + य^२$ होता है इसी रीति से $अ^२ - २ अ य + य^२$ इस का वर्ग मूल $अ - य$ है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\sqrt{अ^२ + १ + २ अ} = \sqrt{अ^२ + २ अ + १} = \sqrt{अ^२} + \sqrt{१} = अ + १$

(२) $\sqrt{य^२ + ९ - ६ य} = \sqrt{य^२ - ६ य + ९} = \sqrt{य^२} - \sqrt{९} = य - ३$

(३) $\sqrt{४ + र^२ - ४ र} = \sqrt{र^२ - ४ र + ४} = \sqrt{र^२} - \sqrt{४} = र - २$

(४) $\sqrt{य^२ - प य + \frac{प^२}{४}} = \sqrt{य^२} - \sqrt{\frac{प^२}{४}} = य - \frac{प}{२}$

(५) $\sqrt{य^2+३य+\frac{९}{४}}=\sqrt{य^2}+\sqrt{\frac{९}{४}}=य+\frac{३}{२}$

(६) $\sqrt{म^2 य^2+२मनय+न^2}=\sqrt{म^2 य^2}+\sqrt{न^2}=मय+न$

(७) $\sqrt{४प^2 र^2-१२अपर+अ^2}=\sqrt{४प^2 र^2}-\sqrt{अ^2}=२पर-अ$

(८) $\sqrt{\frac{१}{४}अ^2 क^2+अकग+ग^2}=\sqrt{\frac{१}{४}अ^2 क^2}+\sqrt{ग^2}=\frac{१}{२}अक+ग$

*४४. जो + अ वा − अ का वर्ग करो तो $अ^2$ यह वर्ग होगा इस कारण वर्गमूल के दो चिन्ह होते हैं जैसा ± इसे धन वा ऋण पढ़ते हैं। जैसे

$\sqrt{अ^2}=\pm अ$ ऐसे ही $\sqrt{अ^2 क^2}=\pm अक$

$\sqrt{अ^2+२अय+य^2}=\pm(अ+य)$ आदि

अ + य और −(अ + य) इन दोनों राशियों का वर्ग $अ^2+२अय+य^2$ है, $-(अ+य)=-अ-य$ इस का वर्ग करते हैं।

$$\begin{array}{r} -अ-य \\ -अ-य \\ \hline अ^2+अय \quad\quad \\ अय+य^2 \\ \hline अ^2+२अय+य^2 \end{array}$$

* ४४ प्रक्रम ।

इस लिये — अ — य वा — (अ + य) इस का वर्ग $अ^2$ + २ अ य + $य^2$ इस का कारण यह है $अ^2$ + २ अ य + $य^2$ कि इस का वर्ग मूल — अ — य वा — (अ + य) है ॥

पूर्ण वर्ग उस राशि को कहते हैं जिस का पूर्ण मूल मिल जाय जैसे २५ पूर्ण वर्ग है क्योंकि इस का ५ पूरा वर्ग मूल है और २६ पूर्ण वर्ग नहीं है क्योंकि इस राशि का ठीक मूल नहीं मिल सक्ता वा ऐसी पूर्ण राशि नहीं मिलती कि जो उस का वर्ग करें तो २६ हो ॥

६६ प्र० पूर्ण वर्गों के तीन पदों को एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखो जैसे $य^2$ + २ अ य + $अ^2$, $य^2$ — ४ य + ४ $य^2$ + ६ य + ९ आदि तो इन में प्रत्येक पूर्ण वर्ग के पदों में यह संबंध दिखाई पड़ता है कि मध्य पद का वर्ग आदि अंत के पदों के चौगुने घात के तुल्य है और जो तीन पदों में यह संबंध न होगा तो उन से पूर्ण वर्ग भी न बनेगा। जैसे $य^2$ — ७ य + १६ यह पूर्ण वर्ग नहीं है और इस के आदि अंत दोनों और १६ यह राशि पूर्ण वर्ग है और उस के पूर्ण वर्ग न होने का कारण यह है ॥

$(७य)^2$ वा ४९ $य^2$ यह मध्य का वर्ग ४ × १६ $य^2$ वा ६४ $य^2$ आदि अन्त के पदों के ४ गुने घात के तुल्य नहीं है परंतु $य^2$ — ८ य + १६ यह राशि पूर्ण वर्ग है अथवा य — ४ इस राशि का वर्ग है और पूर्ण वर्ग होने का यह भी कारण है कि $(८य)^2$ वा ६४ $य^2$ = ४ × १६ $य^2$ इन उदाहरणों से यह बात निकलती है कि जो हम दो पदों से तीसरा ऐसा पद जोड़ा चाहें जिस्से तीन पद की राशि पूर्ण वर्ग हो जाय तो जिस पद को जोड़ो वह पद ऐसा लेना

चाहिये कि जब तीनों पदों को एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखें तो मध्य पद का वर्ग आदि अंत के पदों के चौगुने घात के समान हो॥ जैसे $य^2 + पय$ इस राशि में तीसरा पद मिलाकर पूर्ण वर्ग बनाओ।

कल्पना करो कि पूर्व दोनो पदों में र पद जोड़ने से पूर्ण वर्ग बन जाता है तो $य^2 + पय + र$ यह पूर्ण वर्ग हुआ इस कारण जो पूर्ण वर्ग के पदों में संबंध रहता है उसे देखो ॥ तो

$(पय)^2$ वा $प^2य^2 = ४य^2र \therefore र = \frac{प^2}{४}$ आ इसे पूर्णवर्ग में र के स्थान में रक्खा तो $य^2 + पय + \frac{प^2}{४}$ यह इष्ट पूर्ण वर्ग हुआ ॥

इसी रीति से जो $य^2 - पय$ इस राशि में $\frac{प^2}{४}$ मिलावें तो $य^2 - पय + \frac{प^2}{४}$ यह पूर्ण वर्ग $य - \frac{प}{२}$ इस राशि का होगा

॥ उदाहरण ॥

$य^2 + ६य$ इस में $(\frac{६}{२})^2 = ३^2$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का $य + ३$ मूल होगा ॥

$य^2 - ८य$ इस में जो $(\frac{८}{२})^2$ या १६ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का $य - ४$ मूल होगा ॥

$य^2 + ५य$ इस में जो $\frac{५^2}{४}$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल $य + \frac{५}{२}$ होगा ॥

$य^2 + \frac{3}{2} य$ इस में जो $(\frac{3}{4})^2$ जोडो तो पूर्णवर्ग का मूल $य + \frac{3}{4}$ होगा॥

$य^2 - \frac{3}{2} य$ इस में जो $(\frac{3}{4})^2$ जोडो तो पूर्णवर्ग का मूल $य - \frac{3}{4}$ होगा॥

॥५ अभ्यास के लिये प्रश्न॥

नीचे जो राशि लिखी हैं उनका वर्गमूल निकालो।

(१) $४अ^2क^2$॥ (७) $१ + य^2 - २य$॥

(२) $६य^2र^2$॥ (८) $४य^2 + ४य + १$॥

(३) $१०० अ^2क^4ग^6$॥ (९) $४अ^2 + क^2 - ४अक$॥

(४) $\frac{९अ^2य^2}{४क^2}$॥ (१०) $९य^2 + ६य + १$॥

(५) $\frac{४अ^2क^2}{९य^2र^4}$॥ (११) $य^2 + य + \frac{1}{4}$॥

(६) $\frac{1}{4} \cdot \frac{म^2य^4}{न^2र^2}$ (१२) $य^2 + \frac{1}{य^2} - २$॥

।नीचे जो राशि लिखी हैं उन्हें पूर्णवर्ग बनाओ॥

(१३) $य^2 - २२य$ (१९) $य^2 - \frac{२य}{७}$

(१४) $य^2 - १४य$ (२०) $य^2 + \frac{1}{2}य$॥

(१५) $य^2 + ११य$ (२१) $य^2 - \frac{1}{2}य$॥

(१६) $य^2 + २य$ (२२) $य^2 - \frac{5}{6}य$॥

(१७) $य^2 - य$ (२३) $य^2 - \frac{३य}{५}$॥

(१८) $य^2 + \frac{४य}{५}$ (२४) $य^2 - \frac{७य}{१०}$

॥वर्ग समीकरण॥

६७ परिभाषा वर्ग समीकरण दो प्रकार का होता है एक

वर्गसमीकरण और दूसरा मध्यमाहरण प्रथम ४६ अङ्कमसे ४९ अङ्कन तक जो २ रीति लिखी हैं उनकी क्रिया जिस समीकरण पर करने से समीकरण में केवल अव्यक्त राशि का वर्ग रहजाय जैसे य² तो ऐसे समीकरण को वर्ग समीकरण कहेंगे दूसरे जिन समीकरणों में अव्यक्त राशि का वर्ग और उस का पहिला घात दोनों रहते हों जैसे य² और य ऐसे समीकरणों को मध्यमाहरण कहेंगे ॥

६८ प्र॰ जिस रीति से एकघात एक वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आता है उस रीति से वर्ग समीकरण में अव्यक्त राशि के वर्ग का मान निकल आवेगा फिर वर्गमूल निकालने से अव्यक्त राशि का इष्ट मान मिलजायगा और जो पहिले ही समीकरण में अव्यक्त राशि व्यक्त राशि के साथ ऐसे स्वरूप में मिली हो जैसे (य−अ)² = क इस समीकरण में य अव्यक्त राशि, अ, व्यक्त राशि के साथ मिली है वा समीकरण का लघुतमरूप करने से उसमें अव्यक्त राशि, व्यक्त राशि के साथ पूर्व स्वरूप में मिली हों ॥

जैसे (य−अ)² = क इसका वर्गमूल निकाला तो य−अ = ±√क इस कारण पक्षांतरानयन से य = अ ± √क

॥ उदाहरण ॥

(१) ३य² − २ = २य² + २ इस वर्गसमीकरण में य का मान बताओ ॥

पक्षांतरानयन से ३य² − २य² = २ + २

योग करने से य² = ४

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{४} = \pm २$

(२) $\frac{य^2}{३} - \frac{य^2}{४} - \frac{य^2}{१६} = \frac{१}{३}$ इसमें य का मान निकालो छेदगम के अर्थ हरों के लघुसमापवर्त्य ४८ से

समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो तो

$$१६य^2 - १२य^2 - ३य^2 = १६$$

योग करने से $य^2 = १६$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{१६} = \pm ४$

(३) $७(२य^2 - ६) + ५(३ - य^2) = १९८$ इसमें य का मान बताओ॥

$७(२य^2 - ६) = १४य^2 - ४२$ और $५(३ - य^2) = १५ - ५य^2$

इस कारण ४४ प्रक्रम के अनुसार कोष्ठ को दूर किया। तो

$१४य^2 - ४२ + १५ - ५य^2 = १९८$

पक्षांतरानयन से $१४य^2 - ५य^2 = १९८ + ४२ - १५$

योग करने से $९य^2 = २२५$

९ का भाग देने से $य^2 = \frac{२२५}{९} = २५$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{२५} = \pm ५$

(४) $\frac{४}{३+य} + \frac{४}{३-य} = ३$ इस समीकरण में य का मान बताओ

३+य से गुणा किया तो $४ + \frac{१२+४य}{३-य} = ९ + ३य$

पक्षांतरानयन से $\frac{१२+४य}{३-य} = ५ + ३य$

३−य से गुणा किया तो $१२ + ४य = १५ + ९य - ५य - ३य^2$

पक्षांतरानयन से $३य^2 + ४य + ५य - ९य = १५ - १२$

योग करने से $३य^2 = ३$

३ का भाग देने से $य^2 = १$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{१} = \pm १$॥

(५) $(६य - ५) = ४य$ तो य का मान बताओ

वर्गमूल निकालने से $४य - ५ = \pm २य$ ॥

पक्षांतरानयन से $४य \pm २य = ५$ ॥

$\pm$ इस चिन्ह को ऋण वा धन पढ़ते हैं ॥

इस कारण $२य = ५$ वा $६य = ५$ ॥

इसलिये $य = २\frac{१}{२}$ वा $य = \frac{५}{६}$ ॥

अभ्यास के लिये प्रश्न

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान बताओ ॥

(१) $३य^२ - ५ = \frac{८य}{३} + ७$ ॥

(२) $(य+१)^२ = २य + १७$ ॥

(३) $(य+२)^२ = ४य + ५$ ॥

(४) $(२य-५)^२ = य^२ - २०य + ७३$

(५) $य^२ - \frac{३य^२-२}{५} = ३ - \frac{२य^२-५}{३}$ ॥

(६) $\frac{२य^२+२६}{१५} = ७ - \frac{५०+य^२}{२५}$ ॥

(७) $\frac{य^२}{३} - \frac{य^२}{१५} + \frac{य^२}{२५} = ४\frac{२}{३}$ ॥

(८) $१३\frac{३}{४} - \frac{य^२}{२} = २य^२ - ८\frac{३}{४}$ ॥

(९) $\frac{३}{१+य} + \frac{३}{१-य} = ८$

(१०) $\frac{१}{य^२} - \frac{२}{३य^२+१} = \frac{५}{४(३य^२+१)}$ ॥

(११) $\frac{१४य^२+१६}{२१} - \frac{२य^२+८}{८य^२-११} = \frac{२य^२}{३}$

(१२) $(य - \frac{१}{य})^२ = \frac{१}{४}$ ॥

९९ मध्यमाहरण में अव्यक्त राशि के मान लाने की रीति लिखते हैं॥

॥ रीति ॥

प्रथम ४६ प्रक्रम से ४८ प्रक्रम तक जो रीति लिखी हैं उन से दृष्ट समीकरण पर छेद गम, पक्षान्तरानयन,योग करना आदि क्रिया करने से पूर्व समीकरण का इस अ $य^2$ + कय = ग मध्यमाहरण का सा स्वरूप कर लो जिस से जितने पदों में अव्यक्त राशि का वर्ग हो उन का योग करके वे सब अ$य^2$ इस स्वरूप में आजांय और जितने पदों में अव्यक्त राशि का पहिला घात होवे सब योग करने से कय ऐसे स्वरूप में इकट्ठे हो जांय तो अ$य^2$ इस स्वरूप की राशि को और कय इस स्वरूप की राशि को समीकरण के एक पक्ष में लिखो और सब व्यक्त राशियों को इकट्ठा कर जैसे ग दूसरे पक्ष में लिखो॥

दूसरे जब समीकरण का अ$य^2$ + कय = ग ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण की प्रत्येक राशि में अव्यक्त राशि के वर्ग वा $य^2$ इस के गुण का भाग दो तो समीकरण का $य^2 + \frac{क}{अ}य = \frac{ग}{अ}$ ऐसा स्वरूप हो होजायगा और जो भाग देने से $\frac{क}{अ}$ और $\frac{ग}{अ}$ ये भिन्न पूर्णांक हो जाय तो करलो॥

तीसरे जब समीकरण का $य^2 + \frac{क}{अ}य = \frac{ग}{अ}$ वा भाग देने से $य^2$ + घय = च ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण के प्रत्येक पक्ष में व अव्यक्त राशि आधे गुण का वर्ग जोड़ दो तो जिस ओर के पक्ष में अव्यक्त राशि होंगी उन को मिलाकर पूर्ण वर्ग हो जायगा*॥

चौथे जब अव्यक्त राशियों का पक्ष पूर्ण वर्ग होजाय

* ६९ प्रक्रम

तो समीकरण के हर एक पक्ष का जुदा २ वर्ग मूल निका
ल लो इस्से पूर्व समीकरण का एक वर्ण एक घात समी
करण का स्वरूप हो जायगा इस कारण उस में से य अ
व्यक्त राशि का मान एक वर्ण एक घात समीकरण स
म्बन्धी पूर्व रीतियों पर क्रिया करने से निकल आ
वेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

३य^{२}−१२य+३२=य^{२}+१२य−३२ इस समीकरण में
य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से ३य^{२}−य^{२}−१२य−१२य=−३२−३२॥

योग करने से २य^{२}−२४य=−६४

दो का भाग देने से य^{२}−१२य=−३२

दोनों पक्षों में $\left(\frac{१२}{२}\right)^{२}$ वा ६^{२} जोड़ा तो य^{२}−१२य+६^{२}

=३६−३२=४

वर्ग मूल निकालने से य−६=±२

इस कारण से य=६±२=८ वा ४

य राशि के ८ और ४ इन दोनों मानों को पृथक् २
इस समीकरण में य के स्थान में रक्खो तो भी समीक
रण की समता बनी रहेगी। जैसे समीकरण में य के
स्थान में ८ रक्खा ॥

३×८^{२}−१२×८+३२=८^{२}+१२×८−३२

वा १९२−९६+३२=६४+९६−३२

योग करने से १२८=१२८

दूसरे य के स्थान में ४ रक्खा तो

$३ \times ४^२ — १२ \times ४ + ३२ = ४^२ + १२ \times ४ — ३२$

वा $४८ — ४८ + ३२ = १६ + ४८ — ३२$

योग करने से $३२ = ३२$

॥ उदाहरण ॥

(२) $५(य^२ - ५) - २य(य - १) = ६०$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

$५(य^२ - ५) = ५य^२ - २५$ और $२य(य - १) = २य^२ - २य$ इस लिये $५य^२ - २५ - २य^२ + २य = ६०$ ॥

पक्षान्तरानयन से $५य^२ - २य^२ + २य = ६० + २५$ ॥

योग करने से $३य^२ + २य = ८५$ ॥

३ का भाग देने से $य^२ + \frac{२}{३}य = \frac{८५}{३}$ ॥

इस समीकरण के दोनों पक्षों में $(\frac{१}{३})^२$ जोड़ा ॥ तो

$य^२ + \frac{२}{३}य + (\frac{१}{३})^२ = \frac{८५}{३} + \frac{१}{९} = \frac{२५५ + १}{९} = \frac{२५६}{९}$ ॥

दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया $य + \frac{१}{३} = \sqrt{\frac{२५६}{९}} = \pm\frac{१६}{३}$ ॥

पक्षान्तरानयन से $य = \pm\frac{१६}{३} - \frac{१}{३} = \frac{१५}{३}$ वा $-\frac{१७}{३}$ ॥

$= ५$ वा $-५\frac{२}{३}$ ॥

(३) $य^२ + पय = म$ इस समीकरण में य का मान बताओ समीकरण के दोनों पक्षों में $(\frac{प}{२})^२$ जोड़ा ॥ तो

$य^२ + पय + (\frac{प}{२})^२ = (\frac{प}{२})^२ + म$ ॥

$= \frac{प^२}{४} + म$ ॥

दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया तो $य + \frac{प}{२} = \pm\sqrt{\frac{प^२}{४} + म}$ ॥

पक्षान्तरानयन से $य = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + म}$ ॥

इस समीकरण में प और म राशियों के स्थान में चाहो सो संख्या मान लो तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी और जो मध्यमाहरण इस $य^२ + पय = म$ स्वरूप के होंगे उन में अव्यक्त राशि का मान लाने के अर्थ केवल

$य = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + म}$ इस समीकरण में प और म राशियों के स्थान में जो संख्या इष्ट समीकरण में हो उन्हें रखने से वा अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा जैसे $य^२ + ४य = १२$ इस समीकरण में $य^२ + पय = म$ इस समीकरण की अपेक्षा $प = ४$ और $म = १२$ इस लिये $य$

$$= \frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + म} = -\frac{४}{२} \pm \sqrt{\frac{४^२}{४} + १२}$$

$$= -२ \pm \sqrt{१६} = -२ \pm ४ = २ \text{ वा } -६$$

(८) $\frac{य+२}{य-२} - \frac{य-२}{य+२} =$ इस समीकरण में य का मान बताओ छेद गम के अर्थ दोनों पक्षों को $(य-२)(य+२)$ से गुणा तो $(य+२)^२ - (य-२)^२ = (य-२)(य+२)$ ॥

तो $य^२ + २य + २ - य^२ + २य - २ = य^२ - २$ ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से $य^२ - ८य = २$ ॥

दोनों पक्षों में $(\frac{८}{२})^२ य ८$ जोड़ा तो $य^२ - ४य + ४ = ५$ ॥

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया $य - २ = \pm\sqrt{५}$ ॥

इस कारण पक्षान्तरानयन से $य = \pm\sqrt{५}$ ॥

(५) $य^२ + य + ९ = य^२ + २$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

पहिले पक्ष के भिन्नों को सम छेद करके जोड़ा ॥ तो

$$\frac{य+१+य}{य^२+य} = \frac{१}{य+२} \text{ वा } \frac{२य+१}{य^२+२} = \frac{१}{य+२} \text{ ॥}$$

छेद गम के अर्थ दोनों पक्षों को $(य^२+य)(य+२)$ ॥

से गुणा तो $(२य+१)(य+२)=य^२+य$ ॥

वा $२य^२+५य+२=य^२+य$ ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से $य^२+४य=-२$

दोनों पक्षों में $(\frac{४}{२})^२$ वा ४ जोड़ा तो $य^२+४य+४=४-२=२$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य+२=\pm\sqrt{२}$ ॥

पक्षान्तरानयन से $य=-२\pm\sqrt{२}$ ॥

॥ पूर्ण वर्ग करने का सूत्र लिखते हैं ॥

श्री धराचार्य सूत्रं ॥ चतुराहत वर्ग समे रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् १ ॥

इस का यह अर्थ है कि दोनों पक्षों को अव्यक्त राशि के वर्ग के चार गुने गुण से गुणा करो और फिर दोनों पक्षों में अव्यक्त राशि के एक घात के गुण का वर्ग जोड़ दो अर्थात जो समीकरण का $अ य^२ + क य = ग$ यह स्वरूप हो और क और ग राशि ऋण हों वा धन तो समीकरण के दोनों पक्षों को ४ अ वा $य^२$ के ४ गुने गुण से गुणा करदो और फिर दोनों पक्षों में क वा य के गुण का वर्ग जोड़ दो और फिर दोनों पक्षों का वर्ग मूल निकालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $३य^२+२ = ८५$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

४×३ वा १२ से गुणा तो $३६य^२+२४य=१०२०$

(३३) $\frac{\text{३य}-\text{७}}{\text{८}} = \text{५}\frac{\text{१}}{\text{२}} - \frac{\text{५}(\text{य}-\text{२}\frac{\text{१}}{\text{२}})}{\text{य}+\text{५}}$ ॥

(३४) $\frac{\text{४य}-\text{३}}{\text{२य}-\text{५}} - \frac{\text{२य}-\text{३}}{\text{य}-\text{१}} = \text{३}$ ॥

(३५) $\frac{\text{७}+\text{य}}{\text{७}-\text{य}} + \frac{\text{७}-\text{य}}{\text{७}+\text{य}} = \text{२}\frac{\text{९}}{\text{१०}}$ ॥

(३६) $\frac{\text{३य}-\text{५}}{\text{२य}+\text{५}} + \frac{\text{२३५}}{\text{२०६}} = \frac{\text{३य}+\text{५}}{\text{३य}-\text{५}}$ ॥

(३७) $\frac{\text{३य}+\text{२}}{\text{३य}-\text{२}} + \frac{\text{३य}-\text{२}}{\text{३य}+\text{२}} = \frac{\text{१५य}+\text{११}}{\text{३य}+\text{२}}$ ॥

(३८) $\frac{\text{३}}{\text{५}-\text{य}} + \frac{\text{२}}{\text{४}-\text{य}} = \frac{\text{८}}{\text{य}+\text{२}}$ ॥

(३९) $\frac{\text{२य}+\text{३}}{\text{१०}-\text{य}} = \frac{\text{२य}}{\text{२५}-\text{३य}} - \text{६}\frac{\text{१}}{\text{२}}$ ॥

(४०) $\frac{\text{य}+\text{८}}{\text{य}+\text{१२}} + \frac{\text{५}}{\text{य}+\text{४}} = \frac{\text{३य}+\text{२४}}{\text{३य}+\text{८}}$ ॥

(७२) कभी २ ऐसा भी होता है कि जब दो समीकरणों में दो अव्यक्त राशि रहती हैं तो उन दो समीकरणों में एक वर्ण शोधन से मध्यमाहरण समीकरण निकल आता है और इस में अव्यक्त राशि का मान मध्यमाहरण संबंधी रीतियों से ले आओ और इस मान को इन समीकरणों में से एक समीकरण में रख दो फिर एक वर्ण एक घात समीकरण संबंधी रीतियों से दूसरी अव्यक्त राशि का मान निकालो॥

॥ उदाहरण ॥

२य – ८ = य – र } य और र का मान बताओ॥
और यर – र = २य + २

पहिले समीकरण में पक्षान्तरानयन से॥

२य – य = ८ – र ॥

योग करने से   य = ८ – र

पक्षान्तरानयन से   र = ८ – य

र के स्थान ८ – य को दूसरे इस समीकरण में रक्खा। तो
य (८ – य) – (८ – य) = २य + २
वा ८य – य^{२} – ८ + य = २य + २ पक्षान्तरानयन और योग
करने से य^{२} – ७य = –१० दोनों पक्षों में $(\frac{७}{२})^{२}$ जोड़ा तो
य^{२} – ७य + $(\frac{७}{२})^{२}$ = $\frac{४९}{४}$ – १० = $\frac{९}{४}$ दोनों पक्षों का वर्ग
मूल लिया तो य – $\frac{७}{२}$ = ± $\frac{३}{२}$ पक्षान्तरानयन से

य = $\frac{७ + ३}{२}$ = ५ वा २

और र = ८ – य = ८ – ५ वा ८ – २ = ३ वा ६॥

(२) २य^{२} – ३यर = २ } य और र का मान बताओ॥
और ३य + २र = ८

पहिले समीकरण को २ से गुणा किया तो ४य^{२} – ६यर = ४
दूसरे समीकरण को ३य से गुणा किया तो ९य^{२} + ६यर = २४य
दोनों समीकरणों का योग करने से १३य^{२} = ४ + २४य॥

पक्षान्तरानयन से १३य^{२} – २४य = ४ ॥

दोनों पक्षों में १३ का भाग दिया तो य^{२} – $\frac{२४}{१३}$य = $\frac{४}{१३}$

दोनों पक्षों में $(\frac{१२}{१३})^{२}$ जोड़ा तो य^{२} – $\frac{२४}{१३}$य + $(\frac{१२}{१३})^{२}$ =

$$\frac{१४४}{(२३)^२}+\frac{४}{(२३)}=\frac{९२+२४४}{(२३)^२}=\frac{२९६}{(२३)^२}$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया $य-\frac{१२}{२३}=\pm\frac{२४}{२३}$

पक्षान्तरानयन से $य=\frac{१२}{२३}\pm\frac{२४}{२३}=\frac{१२+२४}{}=\frac{३६}{२३}$ वा $\frac{-१२}{२३}$

$=२$ वा $\frac{-२}{२३}$

और दूसरे इष्ट समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$२र=८-२य=८-६$ वा $८+\frac{६}{२३}=२$ वा $८\frac{६}{२३}$

इस लिये २ का भाग देने से $र=१$ वा $४\frac{३}{२३}$

॥ ७ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) $\left.\begin{array}{l} य-२र=११ \\ ३य^२-२र=४० \end{array}\right\}$ (७) $\left.\begin{array}{l} र-य=२ \\ १०य+र=३यर \end{array}\right\}$

(२) $\left.\begin{array}{l} ३यर-३र^२=१०० \\ ५य-४र=० \end{array}\right\}$ (८) $\left.\begin{array}{l} २य-३र=१ \\ २य^२+यर-५र^२=२० \end{array}\right\}$

(३) $\left.\begin{array}{l} \frac{२}{३}य+\frac{१}{२}र=० \\ \frac{३}{२}य^२-३र^२=२१ \end{array}\right\}$ (९) $\left.\begin{array}{l} ५य-२र=४ \\ ३य^२+४यर=३६ \end{array}\right\}$

(४) $\left.\begin{array}{l} ६(य-र)=२० \\ यर=२८ \end{array}\right\}$ (१०) $\left.\begin{array}{l} य+र=५ \\ य^२+र^२=१३ \end{array}\right\}$

(५) $\left.\begin{array}{l} ३(य+र)=२\frac{१}{५} \\ ८यर=२ \end{array}\right\}$ (११) $\left.\begin{array}{l} २य+२र=१४ \\ २य^२+३र^२=५६ \end{array}\right\}$

(६) $\left.\begin{array}{l} २य+३र=११ \\ य^२+यर=४ \end{array}\right\}$ (१२) $\left.\begin{array}{l} \frac{४य}{५र}=\frac{२४}{२५} \\ य^२+र^२-यर-७र= \end{array}\right\}$

॥ वर्ग समीकरण सम्बन्धी प्रश्न ॥

(१) वह कौन सी संख्या है कि जो उसे उस के आधे से

गुणा करें तो घात ५० के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि य इष्ट संख्या है

तो $\frac{य}{२}$ आधी इष्ट संख्या हुई

इस लिये प्रश्न के अनुसार $य \times \frac{य}{२} = ५०$

$$वा \quad \frac{य^{२}}{२} = ५०$$

२ से गुणा किया तो $य^{२} = १००$ ॥

वर्गमूल लिया तो $य = \pm १०$ ॥

इस कारण इष्ट संख्या +१० मानो वा −१० मानो तो भी प्रश्न की सत्यता बनी रहेगी ॥

क्योंकि $१० \times \frac{१०}{२} = १० \times ५ = ५०$ ॥

और $-१० \times \frac{-१०}{२} = -१० \times -५ = ५०$ ॥

(२) कई आदमियों ने मिलकर कई थान कपड़े के नीलाम में खरीदे और उन्हें बज़ाज़ के हाथ बेचा तो उन को उन थानों के बेंचने से ५।।=) नफ़ा बचा और जब उन्हों ने इस नफ़े को बांटा तो जितने मनुष्य साझी थे उतने ही $२\frac{१}{२}$ आने हर एक साझी को मिले तो बतलाओ कि वे कितने साझी थे ॥

कल्पना करो कि य साझियों की संख्या है ॥

तो प्रश्न के अनुसार एक साझी को $य \times २\frac{१}{२}$ नफ़ा के मिले होंगे और इस कारण य मनुष्यों को $य \times य \times २\frac{१}{२}$ आने नफ़े के मिले होंगे और ५।।=) सब नफ़ा है इस के आने ९० हुए ॥

इस लिये $य \times य \times २\frac{१}{२} = ९०$

$२\frac{१}{२}$ का भाग देने से $य^{२} = \frac{९०}{२\frac{१}{२}} = ३६$

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो $य = \pm ९$
इस लिये ९ मनुष्य साक्षी थे और −९ मनुष्य व्यवहार की रीति से इस प्रश्न का उत्तर ही नहीं सकता॥

(२) एक मनुष्य ने जुलाहे से मोटे धोती के जोड़े ६) रुपये को मोल लिये और फिर उसने १३½ आने एक जोड़े के हिसाब से सब जोड़े बेच डाले तो जितने दामों को उसने एक जोड़ा मोल लिया था उतना उस मनुष्य को नफ़ा हुआ तो बतलाओ कि उस मनुष्य ने कितने जोड़े धोती के मोल लिये थे॥

कल्पना करो कि य जोड़ों की संख्या है॥
और सब जोड़ों के दाम ६) के आने किये तो ९६ आने हुए॥
अब त्रैराशिक से १ जोड़े के दाम निकाले।
$य : १ :: ९६ : \frac{९६}{य}$ इतने आने एक जोड़े के दाम हुए
और उसने एक जोड़ा १३½ आने को बेचा इस लिये उसने सब य जोड़े $य \times १३\frac{१}{२}$ आनों को बेचे होंगे ये बिक्री के दाम हुए इन में से खरीद के दाम निकाल लिये तो $य \times १३\frac{१}{२} - ९६$ इतने आने नफ़ा के बच रहे॥

इस लिये $य \times १३\frac{१}{२} - ९६ = \frac{९६}{य}$

दोनों पक्षों को २य से गुणा किया तो $२७य^२ - १९२य = १९२$

३ का भाग देने से $९य^२ - ६४य = ६४$

९ का भाग देने से $य^२ - \frac{६४}{९}य = \frac{६४}{९}$

पूर्ण वर्ग करने के लिये $\left(\frac{३२}{९}\right)^२$ जोड़ा तो $य^२ - \frac{६४}{९}य + \left(\frac{३२}{९}\right)^२$

$$= \frac{६४}{९} + \frac{१०२४}{८१}$$

$$= \frac{१६००}{८१}$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य - \frac{३२}{९} = ± \frac{४०}{९}$

पक्षान्तरनयन से $य = \frac{३२ ± ४०}{९} = \frac{७२}{९}$ वा $-\frac{८}{९}$

$= ८$ वा $-\frac{८}{९}$

इस लिये आठ जोड़ों की संख्या निकली ॥

(४) एक ज़मींदार ने आमों के पेड़ों की ढेर लगवाई और उसने बराबर दूर पर बराबर पंक्ति में बराबर २ थांभले एक वर्ग क्षेत्र में खुदवाये और जब उसने एक सिरे से पेड़ धरवाये तो सब थांभले पेड़ों से भर गये और २१ पेड़ और बच रहे फिर उसने इन २१ पेड़ों को एक एक करके एक २ पंक्ति की सीध में लगवा दिये और २४ थांभले और खुदवाये और उसने देखा कि जो इन थांभलों में भी पेड़ लग जांय तो हर पंक्ति में बराबर २ पेड़ हो जांयगे और चाहो जिस ओर से पंक्ति हो वर्ग क्षेत्र के स्वरूप में अन्तर न पड़ेगा तो बतलाओ कि उसने कितने पेड़ लगवाये ॥

कल्पना करो कि वर्ग क्षेत्र की एक भुज की ओर य पेड़ लगे हैं तो $य × य$ वा $य^२$ इतने पेड़ संपूर्ण वर्ग क्षेत्र में लगे होंगे इस लिये $य^२ + २१$ इतने पेड़ आम के उस ने लगवाये और जब उसने एक भुज के य पेड़ों की सीध में २ पेड़ लगवा दिया तो उस भुज की ओर के पेड़ों की संख्या $(य+१)$ हुई और $(य+१) × (य+१)$ वा $(य+१)^२$ इतने पेड़ दूसरे वर्ग क्षेत्र में हो जाते जो २४ पेड़ और होते इस लिये प्रश्न के अनुसार ॥

$$(य+१)^2 - २४ = य^2 + ११$$

$$वा\ य^2 + २य + १ - २४ = य^2 + ११$$

पक्षान्तरनयन और योग करने से $२य = ३४$

२ का भाग देने से $य = \frac{३४}{२} = १७$

वर्ग करने से $य^2 = २८९$

इस लिये $य^2 + ११$ वा $२८९ + ११$ वा ३०० संपूर्ण पेड़ लगे थे। अकचग वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज अक, कच, चग और अग में १७ पेड़ आम के लगे हैं और जो बाकी पेड़ ११ बच रहे उन में से प्रथम तो एक पेड़ अक भुज की सीध में लगाया और दूसरे पेड़ को इस भुज के नीचे जो आमों के पेड़ों की पङ्क्ति लगी है उस के सीध में लगाया ऐसे ही ग्यारहवीं पङ्क्ति तक ग्यारहों पेड़ लगा दिये और बाकी छः पङ्क्ति जो नीचे रह गई उन के सीध में एक २ थांभले का चिन्ह कर दिया और फिर सत्तरहवीं पङ्क्ति के थांभले के नीचे से बराबर ए थांभले और खोद लिये तो अच वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज में अठारह थांभले होगये॥

(५) एक मनुष्य ने छापे खाने में किताब छापने को दी तो किताबों के सब सफ़ों की छपवाई के दाम २०) ठहरे परन्तु पीछे से किताब में पांच सफ़े और मिलाये गए और कह सुनके दो आने सफ़ा छपवाई में कमती ठहराया तो सब सफ़ों की छपवाई के दाम १६ ॥=) ठहरे तो बतलाओ कि पुस्तक में सब कितने सफ़े होंगे॥

कल्पना करो कि पुस्तक में पहिले य सफ़े थे और २०) के आने किये तो ३२० आने ज़ए॥

और १६।।।=) के २७० आने हुए ॥

और पहिले य सफ़ों की छपवाई के दाम ३२० आने ठहरे थे इस लिये त्रैराशिक से १ सफ़े की छपवाई के दाम $\frac{३२०}{य}$ आने हुए ॥

और पीछे से जब ५ सफ़े और मिलाये गये तो य+५ इतने सफ़ों की छपवाई के दाम २७० आने ठहरे इस लिये त्रैराशिक से १ सफ़े की छपवाई के दाम $\frac{२७०}{य+५}$ आने हुए ॥

और पीछे से फ़ी सफ़े की छपवाई के दाम २ आने कम ठहरे थे इस लिये प्रश्न के अनुसार $\frac{३२०}{य}=\frac{२७०}{य+५}+२$

२ का भाग देने से $\frac{१६०}{य}=\frac{१३५}{य+५}+१$ दोनों पक्षों को य(य+५) से गुणा तो १६०य+८०० = १३५य+य^२+५य ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से ॥

य^२−२०य=८०० दोनों पक्षों में $(\frac{२०}{२})^२$ वा १०० जोड़ा य^२−२०य+१००=९०० दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया तो य−१० = ±३०

पक्षान्तरानयन से य=१०±३०=४० वा −२०

इस लिये प्रश्न का ४० सफ़े उत्तर हुआ और न −२० सफ़े क्योंकि −२० कहने से प्रश्न का उत्तर कुछ समझ में नहीं आता और जो कोई पूछे कि किताब में कित ने सफ़े हैं और उस का उत्तर दिया जाय कि −२० सफ़े तो यह उत्तर ठीक न होगा ॥

(६) १, २, ३, ४, आदि गिन्ती के ऐसे अङ्क हैं कि जो उन को क्रम से लो और पहिले दो अङ्कों को रक्खो तो जो संख्या बनेगी वह शेष दो अङ्कों के घात की तुल्य होगी

तो बताओ कि वे कौन से चार अङ्क हैं ॥

कल्पना करो कि य, य+१, य+२, और य+३ ये ४ अङ्क हैं तो पहिले अङ्क य को दस स्थानीय अङ्क माने तो उस का अर्थ य दहाइयां वा १०य होगा ॥

और य+१ इस दूसरे अङ्क को एक स्थानीय अङ्क माना तो प्रश्न के अनुसार (य+२) (य+३) ॥

तीसरे और चौथे अङ्कों का घात १०य+य+१ के तुल्य होगा ॥ वा (य+२) (य+३) = १०य+य+१ गुणा करके कोष्ठ को मिला दिया $य^२$+५य+६ = ११य+१ ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से ॥

$$य^२ — ६य = —५$$

पूर्णवर्ग करने से

$$य^२ — ६य + ९ = ९ + ५ = ४$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो

$$य — ३ = \pm २$$

पक्षान्तरानयन से य = ३ ± २ = ५ वा १

इस कारण जो य का मान ५ मानो तो ५, ५+१, ५+२, और ५+३ अर्थात् ५, ६, ७ और ८ ये इष्ट अङ्क हुए कारण यह है कि ५६ = ७×८ और जो य का मान १ मानो तो १, १+१, १+२, १+३ अर्थात् १, २, ३, और ४ इष्ट अङ्क हुए क्योंकि १२ = ३×४ ॥

(७) २० पुरुष और स्त्रियों ने पुण्यार्थ ३) इकट्ठे किये जिस में सब पुरुषों ने मिलकर बराबर देकर १।।) इकट्ठा किया और सब स्त्रियों ने मिलकर बराबर देकर १।।) इकट्ठा किया परन्तु पुरुष ने स्त्री की अपेक्षा १ आने

अधिक दिया तो बतलाओ कि कितने पुरुष थे और कितनी स्त्रियां ॥

कल्पना करो कि य स्त्रियों की संख्या है और र इतने आने एक स्त्री ने दिये तो जैसे सब पुरुष और स्त्री मिलकर २० हैं इस कारण २० में से य स्त्रियों की संख्या निकाल डाली तो शेष २०—य यह पुरुषों की संख्या हुई और पुरुष ने स्त्री से १ आना अधिक दिया है इस लिये र+१ इतने आने एक पुरुष ने दिये होंगे॥

इस कारण य र इतने आने सब स्त्रियों ने दिये होंगे और (२०—य)(र+१) इतने आने सब मनुष्यों ने दिये होंगे और प्रश्न के अनुसार सब स्त्रियों ने मिलकर सर्व धन ३) वा ४८ आने के आधे २४ आने दिये और सब पुरुषों ने भी मिलकर २४ ही आने दिये ॥

इस लिये $\quad$ यर=२४ $\quad$ इन में य और र राशि

(२०—य) (र+१)=२४ $\quad$ का मान बताओ ॥

दूसरे समीकरण में गुणा करने से

$$२०र+२०—यर—य=२४$$

और इस समीकरण में र के स्थान में $\frac{२४}{य}$ यह मान जो पहिले समीकरण से निकला रख दिया ॥ तो

$$२०\times\frac{२४}{य}+२०—२४—य=२४$$

$$वा\ \frac{४८०}{य}—४—य=२४$$

पक्षान्तरनयन से $\frac{४८०}{य}$—य=२८॥

य से गुणा किया तो ४८०—य२=२८य

पक्षान्तरानयन से $४८० = य^{२} + २८य$

वा $य^{२} + २८य = ४८०$

पूर्ण वर्ग करने से $य^{२} + २८य + (१४)^{२} = ४८० + १९६ = ६७६$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य + १४ = \pm २६$

पक्षान्तरानयन से $य = \pm २६ - १४ = १२$ वा -४०

और $२० - य = २० - १२ = ८$ वा $२० - (-४०) = ६०$

और $र = \frac{२४}{य} = \frac{२४}{१२} = २$ वा $\frac{२४}{-४०} = \frac{२४ \div -८}{४० \div ८} = \frac{-३}{५}$

और $र + १ = ३$ वा $\frac{२}{५}$

इस कारण १२ स्त्रियों की संख्या हुई और हर एक स्त्री ने २ आने दिये और ८ पुरुषों की संख्या है ॥

और हर एक पुरुष ने ३ आने दिये ॥

पूर्व समीकरणों से जो य और र अव्यक्त राशियों के ऋण मान लिये हैं उन को प्रश्न के उत्तर निकालने में मत लो ॥

॥ ८ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) १, २, ३, आदि गिन्ती के ऐसे दो अंक निकालो जिन का घात १५६ के तुल्य हो ॥

(२) गिन्ती के ऐसे तीन अंक निकालो जिन का योग पहिले दो अंकों के तुल्य हो ॥

(३) २० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड के वर्ग के तुल्य हो ॥

(४) २१० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड का वर्ग दूसरे खंड के तुल्य हो ॥

(५) २५ के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के

वर्गों का योग ३२८ हो ॥

(६) ३० के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के वर्गों का अन्तर ३०० हो ॥

(७) दो ऐसी संख्या हैं कि उन का घात १४४ है और जो हर एक संख्या में २ जोड़ दिया जाय तो उन का घात २०० होजाय तो बतलाओ कि वे कौन सी दो संख्या हैं ॥

(८) ऐसी संख्या निकालो कि उस के वर्ग और संख्या में २५६ का अन्तर हो ॥

(९) ऐसा भिन्न बताओ कि वह अपने वर्ग से $\frac{2}{9}$ के अनुमान बड़ा हो ॥

(१०) आगरे से काशी जी तक दो अंगरेज़ों की खड़खड़िये की डाक बैठी और वे दोनों अंगरेज़ एक ही समय में सवार हुए परंतु एक खड़खड़िये में जो घोड़े अदला बदली से लगे वे दूसरे खड़खड़ियों के घोड़ों से हर एक घंटे में २ मील सिवाय चले और जब अगला खड़खड़िया २५६ वें मील के पत्थर तक पहुंचा तो बतलाओ कि हर एक खड़खड़िया हर एक घंटे में कितने मील चला होगा ॥

(११) एक बङ्गाली प्रातःकाल के समय में ताजगंज से सिकन्दरे की ओर बग्घी पर बैठकर ६ मील गया परंतु लौटती बेर पैदल आया और बग्घी पीछे २ चली आई जब उसने घड़ी देखी तो मालूम हुआ कि जो समय उसे जाते में लगा था उससे लौटते में ५० मिनट सिवाय लगे और उसने जब अपनी लौटने की चाल के

नगरों के बीच १२० मील का अन्तर था जिस दिन एक नगर से एक मनुष्य दूसरे नगर को चला उसी दिन दूसरे नगर से एक मनुष्य पहिले नगर को चला और पहिले नगर का मनुष्य दूसरे मनुष्य की अपेक्षा ६ मील हर रोज़ अधिक चलता और जितने दिन पीछे वे दोनों मनुष्य राह में मिले उतने दिनों की संख्या से दूने मील दूसरा मनुष्य चलता था तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य कितने मील रोज़ चलता होगा ॥

(२५) रेल गाड़ी के अगले पहिये पिछले पहियोंसे छोटे होते हैं जब रेल गाड़ी १२० गज़ चली तो इस बीच में अगले पहियों ने पिछले पहियों की अपेक्षा ६ बार अधिक चक्कर किया परन्तु एक और रेल गाड़ी थी कि उस के पहियों का घेर पहिले रेल गाड़ी के पहियों के घेर से एक २ गज़ बड़ा था और जब यह रेल गाड़ी १२० गज़ चली तो उस के अगले पहिये पिछले पहियोंसे ४ बार अधिक घूमे तो बतलाओ कि पहिली रेल गाड़ी के अगले पहियों का कितना घेर था और पिछले का कितना ॥

॥ समीकरण सम्बन्धी व्याख्या ॥

७८ सू० जब समीकरण के दोनों पक्षों में भिन्न पद हों और उनके हरों में केवल अङ्क हों जैसे ॥

$\frac{य}{४} + \frac{य}{६} + \frac{य}{३} + \frac{य}{३} =$ [illegible] तो ऐसे समीकरणों में सम्बन्धि राशि का अङ्क [illegible] की रीति से भिन्न का [illegible] करने से [illegible] और क्रियाओं को

यह अवश्य चाहिये कि वह पहिले अङ्क गणित अच्छी रीति से सीख लें तिस पीछे बीज गणित का आरम्भ करें क्योंकि बीज गणित में बहुतेरी जगह ऐसे प्रश्न आन पडते हैं कि उन का उत्तर बिना अङ्क गणित जाने के उन से नहीं निकल सकेंगे॥

जैसे $\frac{य}{५}+\frac{य}{४}+\frac{य}{३}-\frac{य}{२}=२७$ इस में य का मान बताओ

क्योंकि $\frac{य}{५}=य.\frac{१}{५}$, $\frac{य}{४}=य.\frac{१}{४}$, $\frac{य}{३}=य.\frac{१}{३}$ और $\frac{य}{२}=य.\frac{१}{२}$

इस लिये $य.\frac{१}{५}+य.\frac{१}{४}+य.\frac{१}{३}-य.\frac{१}{२}=२७$॥

वा $य\left(\frac{१}{५}+\frac{१}{४}+\frac{१}{३}-\frac{१}{२}\right)=२७$॥

इस कारण $य=\frac{२७}{\frac{१}{५}+\frac{१}{४}+\frac{१}{३}-\frac{१}{२}}$

य का मान जो लिखा है इसका लघुतम रूप केवल अङ्क गणित की रीति से क्रिया करने से हो जायगा॥

७२॥ बहुधा मान समीकरणों के उदाहरणों में भिन्न पद होते हैं तो छेद गम क्रिया के स्थान में ऐसी क्रिया करते हैं जो नीचे उदाहरणों पर कई है इससे सहज पड़ता है॥

(१) $\frac{६य-५}{२१}+\frac{य-३}{५य-६}=\frac{२य}{७}$ इस में य का मान बताओ॥

क्योंकि $\frac{६य-५}{२१}=\frac{६य}{२१}-\frac{५}{२१}=\frac{२य}{७}-\frac{४}{२१}$

* ३३ और २६ संक्षेप॥

\+ ३५ सङ्क्षेप॥

इस लिये $\frac{२य}{७} - \frac{४}{२१} + \frac{य-२}{४य-६} = \frac{२य}{७}$

शोधन और पक्षान्तरानयन से $\frac{य-२}{४य-६} = \frac{४}{२१}$

२१(४य-६) से गुणा करो तो

$$२१य-४२ = १६य-२४$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से य = १८

७४॥ दो वर्ण समीकरण में एक वर्ण शोधन के लिये एक वर्ण वा अक्षर के गुणों का लघु समापवर्त्य निकालते हैं परंतु बहुधा दो वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशियों का मान बिना लघु समापवर्त्य निकालने के मिल जाता है इस रीति को दिखाते हैं॥

।७५ प्रक्रम का दूसरा उदाहरण लिखते हैं।

(२) $\left.\begin{array}{l} १८य - २२२र = १५ \\ ३६य - ७७र = २१ \end{array}\right\}$ य और र का मान बताओ॥

अन्तर करने से $१८य - ४४र = -६$

२ से गुणा किया तो $३६य - ८८र = -१२$

$\left.\begin{array}{l} ३६य - ८८र = -१२ \\ ३६य - ७७र = २१ \end{array}\right\}$ दूसरा समीकरण॥

अन्तर करने से ११र = ३३

११ का भाग देने से र = ३

और १८य = ४४र - ६ = १३२ - ६ = १२६

१८ का भाग देने से य = $\frac{१२६}{१८}$ = ७

।७५ प्रक्रम के प्रश्नों का १६ प्रश्न लिखते हैं।

$\left.\begin{array}{l} १०१य - २१र = ६३ \\ १०३य - २८र = २६ \end{array}\right\}$ य और र का मान बताओ॥

अन्तर करने से २य − ४र = − ३४
६ से गुणा किया १२य − २४र = − २०४
और १०१य − २४र = ६३
अन्तर करने से ८९य = २६७

८९ का भाग देने से य = $\frac{२६७}{८९}$ = ३
और ४र = २य + ३४ = ४०
४ का भाग देने से र = $\frac{४०}{४}$ = १० ॥

॥ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

५७य − ३७र = ८६
५४य − ३५र = ८२ } य और र का मान बताओ ॥

उत्तर य = ८ और र = १०

सम्बन्ध अनुपात ध्रुवराशि और चलराशि परिभाषा

जब समान जाति की एक बड़ी राशि और छोटी राशि में यह सम्बन्ध ढूंढते हैं कि बड़ी राशि में छोटी राशि कितनी है तो इन छोटी राशियों की संख्या को पूर्वोक्त दोनों बड़ी छोटी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं वा जब सजातीय छोटी राशि और बड़ी राशि में यह सम्बन्ध देखते हैं कि छोटी राशि बड़ी राशि का कौन सा भाग है तो इस भाग को छोटी बड़ी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं इस परिभाषा से यह जान पड़ता है कि जब दो राशियों में सम्बन्ध ढूंढना हो तो पहिली राशि में दूसरी राशि का भाग दो जो लब्धि हो वही इष्ट सम्बन्ध होगा। जैसे बताओ कि ६ और ३ में क्या सम्बन्ध है तो ६ ÷ ३ = २ यही ३ का [illegible] और ३

का सम्बन्ध ३ऋ इस से यह जाना जाता है कि ६ में ३ ती न वार है ॥

ऐसे ही ३ और ६ में सम्बन्ध बताओ तो $३ \div ६ = \frac{१}{२}$ ॥

यही ३ और ६ में सम्बन्ध ऋआ इस से यह जान पड़ता है कि ६ का ३ तृतीयांश है ॥

ऐसे ही $\frac{अ}{क}$ इस से अ और क इन दो राशियों का सम्बन्ध जाना जाता है अ और क के स्थान में चाहो जो संख्या मान लो और जो क से अ बड़ा हो वा $अ > क$ तो $\frac{अ}{क}$ इस का अर्थ है कि अ में क इस का भाग $\frac{अ}{क}$ वार जाता है और जो क से अ छोटा हो वा $अ < क$ तो $\frac{अ}{क}$ इस का यह अर्थ है कि क में अ, ऐसे $\frac{अ}{क}$ इतने भाग हैं।

जब अ और क दो राशियों का सम्बन्ध लिखना होता है तो $अ : क$ वा $\frac{अ}{क}$ यों लिखते हैं इस लिये $अ : क = \frac{अ}{क}$ वा $अ : क$ और $\frac{अ}{क}$ इन दोनों का एकही अर्थ है ॥

ऐसे ही $ग : घ = \frac{ग}{घ}$ जो अ और क इन दो राशियों का सम्बन्ध और ग और घ इन दो राशियों का सम्बन्ध समान हो वा $अ : क = ग : घ$ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ तो ॥

ऐसे दो सम्बन्धों की समता को अनुपात कहते हैं और इस के लिखने की यह रीति है जैसे $अ : क :: ग : घ$ इस को यों पढ़ते हैं जो अ और क में सम्बन्ध है वही ग और घ में सम्बन्ध है क्यों कि $\frac{२}{३} = \frac{४}{६}$ ॥

इस लिये $२ : ३ :: ४ : ६$ वा २ और ३ में जो सम्बन्ध है वही ४ और ६ में सम्बन्ध है और २, ३, ४, और ६ इन को अनुपातीय अवयव कहते हैं ॥

विद्यार्थी को चाहिये कि जब दो राशि में सम्बन्ध होतो

उस का भिन्न रूप कर ले वही सम्बन्ध का मापक होगा जैसे अ और क इन का सम्बन्ध अ : क वा $\frac{अ}{क}$ है और जो अनुपात हो तो उस के समीकरण का रूप कर लो। जैसे अ : क : : ग : घ इस को $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ यों लिखते हैं ॥

सम्बन्ध का जो भिन्न रूप कर लेते हैं इस से जो क्रिया भिन्न पर हो सक्ती है वह सम्बन्ध पर भी हो सक्ती है और भिन्न सम्बन्धी क्रियाओं का वर्णन हो ही चुका है ऐसे ही अनुपात को जो समीकरण के रूप में लिखते हैं इस से समीकरण सम्बन्धी क्रिया अनुपात पर हो सक्ती हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ७ : ४ यह एक सम्बन्ध है और ८ : ५ यह दूसरा सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है

७ : ४ इस सम्बन्ध का $\frac{७}{४}$ मापक है ॥

८ : ५ इस सम्बन्ध का $\frac{८}{५}$ मापक है ॥

$\frac{७}{४}$ और $\frac{८}{५}$ इन के हरों का समच्छेद किया ॥ तो

इन भिन्नों का $\frac{३५}{२०}$ और $\frac{३२}{२०}$ यह स्वरूप हुआ और $\frac{३५}{२०} = \frac{३२}{२०} + \frac{३}{२०}$ इस लिये $\frac{३५}{२०}$ वा $\frac{७}{४}$ $\frac{३२}{२०}$ वा $\frac{८}{५}$ से बड़ा है अर्थात् ७ : ४ > ८ : ५ ॥

७६॥ जो सम्बन्ध के दोनों पदों को एक राशि से गुणा करें वा उन में किसी एक राशि का भाग दें तो सम्बन्ध का मान ज्यों का त्योंहीं बना रहेगा॥

जैसे अ : क यह एक सम्बन्ध है॥

अ : क $= \frac{अ}{क}$ ७५ वें प्रक्रम के अनुसार॥

और $\frac{अ}{क} = \frac{म अ}{म क}$ १५ वें प्रक्रम के अनुसार॥

इसलिये अ : क $= \frac{म अ}{म क} =$ म अ : म क॥

उलटा से म अ : म क $= \frac{म अ}{म क} = \frac{अ}{क} =$ अ : क॥

॥ उदाहरण॥

२ : ३ = ४ : ६, ५ : २ = २५ : १०, १ : ५ = १० : ५०

७७ जो अ : क : : ग : घ तो अ घ = क ग और जो॥

अ घ = क ग तो अ : क : : ग : घ॥

क्योंकि अ : क : : ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को

क घ से गुणा किया तो $\frac{अ क घ}{क} = \frac{ग क घ}{घ}$॥

परन्तु अ क घ = क . अ घ और ग क घ = घ . क ग

इसलिये $\frac{क . अ घ}{क} = \frac{घ . क ग}{घ}$ वा अ घ = क ग

जो अ घ = क ग तो इन तुल्य राशियों में क घ का भाग

[illegible] प्रक्रम॥

दिया तो $\frac{अ घ}{क घ} = \frac{क ग}{क घ} = \frac{ग}{घ}$ वा अ:क::ग:घ ॥

इस कारण जो अनुपात के तीन पद मालूम हों तो उन से शेष चौथा पद भी मालूम हो जायगा ॥

जैसे जो अ:क::ग:य तो पूर्व रीति से अय = कग अ का भाग देने से $य = \frac{क ग}{अ}$ यह त्रैराशिक की उपपत्ति हुई और त्रैराशिक की रीति से जो तीन पद अनुपात के जाने हुए रहते हैं तो उन से चौथा पद मिल जाता है ॥

७८ जो अ:क::ग:घ तो क:अ::घ:ग क्योंकि अ:क::

ग:घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को क घ से गुण

किया तो अ घ = क ग इन राशियों में अ ग इस का भा

ग दिया तो $\frac{अ घ}{अ ग} = \frac{क ग}{अ ग}$ वा $\frac{घ}{ग} = \frac{क}{अ}$

वा $\frac{क}{अ} = \frac{घ}{ग}$ इस लिये

क:अ::घ:ग ॥

७९ जो अ:क::ग:घ तो अ:ग::क:घ ॥

क्योंकि अ:क::ग:घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ ॥

इन राशियों को $\frac{क}{ग}$ से गुणा किया तो $\frac{क}{ग} \cdot \frac{अ}{क} = \frac{क}{ग} \cdot \frac{ग}{घ}$

वा $\frac{अ क}{क ग} = \frac{क ग}{ग घ}$ वा $\frac{अ}{ग} = \frac{क}{घ}$ इस लिये अ:ग::क:घ

८० जो अ:क::ग:घ तो अ+क:क::ग+घ:घ

---

† ३४ प्रक्रम ॥ * ३४ प्रक्रम ॥ + ७५ प्रक्रम ॥

‡ ३५ प्रक्रम ॥

क्योंकि अ:क::ग:घ वा[‡] $\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$ ॥

इन राशियों में १ जोड़ा तो $\frac{\text{अ}}{\text{क}}+1=\frac{\text{ग}}{\text{घ}}+1$ वा $\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}$

$=\frac{\text{ग}+\text{घ}}{\text{घ}}$ इस लिये अ+क:क::ग+घ:घ ॥

८१ जो अ:क::ग:घ और ग:घ::च:ज तो अ:क::च:ज।

क्योंकि अ:क::ग:घ वा $\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$
ग:घ::च:ज वा $\frac{\text{ग}}{\text{घ}}=\frac{\text{च}}{\text{ज}}$

इस लिये $\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{च}}{\text{ज}}$ कारण यह है कि ये दोनों राशि $\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$ के तुल्य हैं इस लिये अ:क::च:ज ॥

८२ जो अ:क::ग:घ और क:च::घ:ज तो अ:च::ग:ज।

क्योंकि अ:क::ग:घ वा[*] $\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$ ॥

और क:च::घ:ज वा $\frac{\text{क}}{\text{च}}=\frac{\text{घ}}{\text{ज}}$

इस लिये $\frac{\text{अ}}{\text{क}}\times\frac{\text{क}}{\text{च}}=\frac{\text{ग}}{\text{घ}}\times\frac{\text{घ}}{\text{ज}}$

वा $\frac{\text{अक}}{\text{कच}}=\frac{\text{गघ}}{\text{घज}}$

वा[†] $\frac{\text{अ}}{\text{च}}=\frac{\text{ग}}{\text{ज}}$ इस लिये अ:च::ग:ज ॥

॥ रेखा गणित के पांचवें अध्याय में जो अनुपात की परिभाषा लिखी है वह यह है ॥

परिभाषा जो चार राशि हों और उन में पहिली और तीसरी राशि एक ही राशि से गुणी जांय और दूसरी और चौथी राशि भी किसी एक राशि से गुणी जांय और जो

‡ ७५ प्रक्रम ॥ * ७४ प्रक्रम ॥ † ७५ प्रक्रम ॥ ७५ प्रक्रम ॥

पहिली राशि का घात, दूसरी राशि के घात से बड़ा हो और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से बड़ा हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के घात के तुल्य हो ॥
और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से तुल्य हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के घात से छोटा हो और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से छोटा हो तो पहिली दूसरी तीसरी और चौथी राशि अनुपातीय होंगी ॥

जो बीज गणित की परिभाषा के अनुसार चार अनुपातीय राशि हों तो वे राशि रेखा गणित की परिभाषा के अनुसार भी अनुपातीय होंगी ॥

जैसे जो अ, क ग, और घ ये अनुपातीय राशि हों तो $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को $\frac{म}{न}$ राशि से गुणा किया तो $\frac{म}{न} \cdot \frac{अ}{क} = \frac{म}{न} \cdot \frac{ग}{घ}$ ॥

वा $\frac{म\,अ}{न\,क} = \frac{म\,ग}{न\,घ}$ भिन्न के गुण से यह जान पड़ता है कि जो म अ > न क तो म ग > न घ और जो म अ = न क तो म ग = न घ और जो म अ < न क तो म ग < न घ और पहिली और तीसरी राशि अ और ग को म से गुणा किया तो म अ और म ग यह घात हुई और दूसरी और चौथी राशि क और घ को न से गुणा किया तो न क और न घ यह घात हुई इस कारण रेखा गणित की परिभाषा के अनुसार भी अ, क, ग और घ ये चार राशि अनुपातीय हुई ॥

८४ जब एक राशि के कई जुदे २ मान होते हैं तो ऐसी राशि को चल राशि कहते हैं और जो एक राशि का एक ही मान हो तो ऐसी राशि को ध्रुव राशि कहते हैं

जब दो राशियों में ऐसा सम्बन्ध होता है कि जितनी गुनी एक राशि बढ़ जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि बढ़ जाय वा जितनी गुनी एक राशि घट जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि घट जाय तो ऐसे परस्पर सम्बन्ध को क्रम रूपान्तर कहेंगे॥

जैसे एक मजदूर जो रोज़ पाता हो और वह अधिक दिन काम करें तो उसे उसी परिमाण से दाम भी सिवाय मिलेंगे और जो वह थोड़े दिन काम करेगा तो उसे उसी परिमाण से दाम भी कमती मिलेंगे इस लिये दाम और दिनों के बीच क्रम रूपान्तर होगा॥

ऐसे ही अ और क जो दो ऐसी राशि हों कि उन के बीच क्रम रूपान्तर हो और जो अ राशि ग के समान हो जाय और क राशि घ राशि के समान तो अ:क::ग:घ

बहुधा दो राशि में ऐसा परस्पर सम्बन्ध रहता है कि जो एक राशि घट बढ़ जाय तो दूसरी राशि भी अवश्य घट बढ़ जायगी परन्तु उन दोनों राशियों के बीच क्रम रूपान्तर न हो जैसे वर्ग क्षेत्र में जो भुज घट बढ़ जाय तो वर्ग क्षेत्र का क्षेत्र फल भी अवश्य घट बढ़ जायगा परन्तु भुज और क्षेत्र फल के बीच क्रम रूपान्तर न होगा कारण यह है कि जो वर्ग क्षेत्र की भुज दूनी हो जाय तो क्षेत्र फल चौगुना हो जायगा॥

जैसे जो भुज का मान २ है तो क्षेत्र फल ४ होगा और

जो भुज का मान २× २ वा ४ हो तो ४ × ४ वा १६ क्षेत्र फल होगा ऐसे ही जो भुज तीन गुनी हो जाय तो क्षेत्र फल नौ गुना हो जायगा जैसे जो भुज का मान ३× २ वा ६ हो तो ६× ६ वा ३६ क्षेत्र फल होगा ॥

जब दो राशियों के बीच $\propto$ ऐसा चिन्ह देखो तो जानो कि दोनों राशियों का रूपान्तर होता है ॥

॥ उदाहरण ॥

र $\propto$ य और जो य = २ और र = २० तो अनुपात बनाओ ॥

जब र का मान २० है तब य का मान २ है और य और र के बीच क्रम रूपान्तर होता है ॥

इस लिये र : २० :: य : २ और* र : य :: २० : २

वा† र : य :: २० : २.

८५ परिभाषा जब किसी राशि का १ में भाग देते हैं तो उस भिन्न को व्यस्त राशि कहते हैं जैसे जो अ एक राशि हो तो $\frac{१}{अ}$ व्यस्त राशि होगी और राशि और व्यस्त राशि में ऐसा सम्बन्ध रहता है कि जो राशि जै गुनी बढ़ जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी घट जायगी और जो राशि जै गुनी घट जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी बढ़ जायगी जैसे ४ संख्या है इस की $\frac{१}{४}$ व्यस्त संख्या हुई जो ४ के स्थान में दो गुना ४ वा २×४ वा ८ संख्या हो तो चौथाई का आधा अर्थात् $\frac{१}{२×४}$ वा $\frac{१}{८}$ व्यस्त संख्या होगी और यह चौथाई का आधा है और जो चार के स्थान में ४ का आधा अर्थात् $\frac{४}{२}$ वा २ रक्खा जाय तो चौथाई का दूना $\frac{१}{४}$ × २ वा $\frac{१}{२}$ व्यस्त संख्या होगी

* ७९ प्रक्रम ॥ † ७६ प्रक्रम ॥

और यह चौथाई दूनी है इस लिये जब दो राशियों में ऐसा सम्बन्ध होता है कि जब एक राशि जै गुनी घट जाय तो दूसरी राशि उतनी ही गुनी घट जाय और जो पहिली राशि जै गुनी घट जाय तो दूसरी राशि भी उतनी ही बढ़ जाय तो उसे उत्क्रम रूपान्तर कहेंगे ॥

जैसे अ और क इन का उत्क्रम रूपान्तर होता है तो इस को अ० = $\frac{१}{क}$ यों लिखते हैं जो अ का स्वरूप ग हो जाय और क का स्वरूप घ तो अ : ग :: $\frac{१}{क}$: $\frac{१}{घ}$ ॥

इस अनुपात की तीसरी और चौथी राशियों को क घ से गुणा* तो अ : ग :: घ : क ॥

जो कोई हरकारा जल्दी से चिट्ठी ले जाता है और जितने समय में वह चिट्ठी पहुंचा देगा उस समय में और उस की शीघ्रता में उत्क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो वह मनुष्य दूनी जल्दी चले तो वह पूर्व समय की अपेक्षा आधे समय में पहुंचेगा और ऐसे जो वह धीरा चलने लगे तो उस को चिट्ठी पहुंचाने में अधिक समय लगेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

र और य में उत्क्रम रूपान्तर है या र० = $\frac{१}{य}$ जो य = ३ और र = २ तो अनुपात बनाओ ।

र : २ :: $\frac{१}{य}$: $\frac{१}{३}$ वा* र : $\frac{१}{य}$ :: २ : $\frac{१}{३}$

वा† र : $\frac{१}{य}$ :: ३ : २

* ७९ प्रक्रम ॥ *७९ प्रक्रम ॥ † ७६ प्रक्रम

८६ दो राशियों के घात और तीसरी राशि के बीच में क्रम रूपान्तर होता है॥

जैसे जो मज़दूर जितने आने रोज़ पाता हो उन आनों को जितने दिन वह काम करे उन में गुणा कर दे सो इस घात और उस के सब दामों में क्रम रूपान्तर होगा क्यों कि जो पूर्व्व घात दूना हो जायगा तो उस के दाम भी दूने हो जायगे और घात दो रीति से दूना हो सक्ता है कि तो दिन दूने हो जांय वा एक दिन की मिहनत के दूने दाम हो जांय जैसे जो एक मज़दूर २ आने रोज़ पाता हो और वह ४ दिन काम करे तो उस के सब दाम ४×२ वा ८ आने हुए जो वह ४ आने रोज़ पाने लगे तो वह ४ दिन में ४×४ वा १६ आने कमा लेगा वा जो वह दो ही आने रोज़ पावे परंतु ८ दिन काम करे तो भी वह २×८ वा १६ आने कमावेगा॥

ऐसे ही अ और क ग इन में क्रम रूपान्तर है वा अ ०= क ग जो अ का स्वरूप घ हो जाय और कग का स्वरूप च ज तो अ: घ:: क ग: च ज॥

॥ उदाहरण ॥

ल ०= य र, जो य=२, र=२ और ल=२० तो अनुपात बताओ

ल: २०:: य र: २×२ इस लिये ल: य र::
२०: ४ वा ल: य र:: २०: ४

८७ जो दो चल राशियों में परस्पर क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध हो और उन दोनों राशियों के मान व्यक्त हों तो

रूपान्तर का समीकरण स्वरूप हो सक्ता है ॥

जैसे जो अ ○= क और अ = ग और क = घ तो अ: ग:: क: घ इस लिये अ घ = ग क घ का भाग देने से

$अ = \frac{ग क}{घ} = \frac{ग}{घ} . क$ ॥

॥ उदाहरण ॥

र ○= य और य = १ और र = ३ तो य और र के बीच समीकरण बनाओ ॥

र: ३:: य: १ इस लिये र = ३ य

जब अ और क दो राशि में क्रम रूपान्तर हो तो $\frac{अ}{क}$ यह सम्बन्ध सदा एकसा बना रहेगा क्योंकि यह तो हम लिख ही चुके हैं कि जो भिन्न के अंश और हर को एक राशि से गुणा करें वा उन में किसी एक राशि का भाग दें तो भी भिन्न के मान में कुछ अन्तर न पड़ेगा अर्थात् $\frac{अ}{क}$ ध्रुव राशि होगी यह अ और क इन के क्रम रूपान्तर से न बदलेगी इस कारण $\frac{अ}{क}$ इस के स्थान में म. प. वा न कोई एक अक्षर रख देते हैं ॥

जैसे $\frac{अ}{क}$ = म वा अ = म क ॥

जो ग और घ के बीच क्रम रूपान्तर हो वा ग ○= घ तो $\frac{ग}{घ}$ यह ध्रुव राशि ही बनी रहेगी परन्तु ग और घ के रूपान्तर होने से $\frac{ग}{घ}$ यह राशि $\frac{अ}{क}$ राशि के समान न हो जायगी इस लिये $\frac{ग}{घ}$ कोन के समान मान लेंगे जैसे उसे म के समान न मानेंगे क्योंकि म = $\frac{अ}{क}$ इस कारण गुणा करने से ग = न घ ॥

॥ ७७ प्रक्रम ॥

॥ उदाहरण ॥

दो राशियों के योग और र राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और जिन राशियों का योग है उन में से एक राशि और य राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और दूसरी राशि और य² इन के बीच क्रम रूपान्तर है तो इस क्रम रूपान्तर सम्बन्ध का समीकरण स्वरूप करो ॥

कल्पना करो कि $\frac{\text{योग की एक राशि}}{\text{य}}$ = म और

$\frac{\text{योग की दूसरी राशि}}{\text{य}^२}$ = न म और न ध्रुव राशि है इस लिये गुणा करने से योग की एक राशि = मय और योग की दूसरी राशि = नय² और कल्पना करो कि $\frac{\text{मय}+\text{नय}^२}{\text{र}}$ = प यह ध्रुव राशि है इस कारण गुणा करने से मय + नय² = पर यही इष्ट समीकरण हुआ ॥

जो य और र दोनों राशियों के दो दो मान मालूम हो जांय तो म और न ध्रुव राशियों के मान भी मालूम हो जांयगे ॥

॥ १० अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) ३अ : २१अ ॥
(२) २य : १०य² ॥
(३) अय : कय ॥
(४) अकग : कग ॥
(५) अयर : २य ॥
(६) ३अकय : २अ²य ॥
(७) अ²पग : ३अगय ॥
(८) ३मै²र² : १२य²र² ॥
(९) अग + कग : ग ॥
(१०) २अय + य² : मय ॥
(११) १ − य² : १ − य ॥
(१२) अ² − क² : अ + क ॥

॥ नीचे जो सम्बन्ध लिखे हैं उनका लघुतम रूप करो ॥

(१३) ५अय : ९य ॥ (१६) २यर^{३} : $\frac{१}{४}$य^{३} ॥

(१४) १६यर : २०य^{२} ॥ (१७) $\frac{७ अयर}{२×२×३} : \frac{५ अर^{२}}{२×३×४}$

(१५) $\frac{१}{२}$ अय : $\frac{३}{४}$ कय ।

(१८) $\frac{न(न-१)}{१×२}$ अ^{२}य^{२} : न अ^{२} य^{२} ॥

(१९) १५ : १६ यह एक सम्बन्ध है और १६ : १७ दूसरा सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है ॥

(२०) जो य : र :: ३ : १ तो बतलाओ कि २ अय ३ कर यह संबन्ध या ३ अ : २ क यह सम्बन्ध बड़ा होगा ॥

(२१) जो अ : क :: ग : घ तो बतलाओ कि २ अ : ३ क :: २ ग : ३ घ ॥

(२२) जो अ : क :: क : ग तो बतलाओ कि अ : ग :: अ^{२} : क^{२} ॥

(२३) अ : अ + य :: अ – य : क इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२४) य : र :: र : २अ – र इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२५) जो अ + य : अ – य :: ११ : ७ तो अ : य इस संबन्ध का मान बताओ ॥

(२६) ऐसी दो संख्या बतलाओ कि उन का सम्बन्ध २ : ३ इस संबन्ध के समान हो और इन के योग और घात में जो सम्बन्ध हो वह ५ : १२ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(२७) अ य ३ ग य और $\frac{६कगर}{ख}$ ये अनुपात के पहिले तीसरे और चौथे पद हैं तो बतलाओ कि अनुपात का दूसरा कौन सा पद है॥

(२८) दो कौन सी संख्या हैं कि उन का सम्बन्ध ३:४ इस सम्बन्ध के तुल्य हो और जो उन दोनों संख्याओं में ५ जोड़ा जाय तो उन का सम्बन्ध ४:५ इस सम्बन्ध के तुल्य हो॥

(२९) जो र ∝ य और य = २ और र = ८ अ तो य और र के बीच समीकरण बनाओ॥

(३०) जो र ∝ $\frac{१}{य}$ और य = $\frac{१}{२}$ और र = ८ तो य और र के बीच समीकरण बनाओ॥

(३१) जो १ + य ∝ १ − य तो बतलाओ कि १ + य^{२} ∝ य॥

(३२) जो २य + ३र ∝ ४य + ५र तो बतलाओ कि य ∝ र॥

॥ योगज श्रेढ़ी और अंतर श्रेढ़ी ॥

(८८) परिभाषा श्रेढ़ी शब्द का अर्थ पङ्क्ति है जब एक पङ्क्ति में राशि इस क्रम से हों कि प्रत्येक दो पास की राशियों के बीच समान अन्तर हो तो ऐसी पङ्क्ति को श्रेढ़ी कहेंगे और श्रेढ़ी के पहिले पद को आदि पद वा मुख कहते हैं और सब से पहिले पद को अन्त पद कहते हैं और प्रत्येक दो राशियों के बीच जो समान अन्तर है उसे चय बोलते हैं और मुख और अन्त पद के बीच जितने पद हों उन्हें मध्य पद और पदों की संख्या को गच्छ और श्रेढ़ी के सब पदों

के योग को श्रेढ़ी फल कहते हैं ॥

जैसे १.३.५.७.९.११. आदि इस पङ्क्ति को योगश्रे ढ़ी कहेंगे क्योंकि प्रत्येक दो पास के पदों में पहिला पद दूसरे पद से २ के समान बड़ा है वा एक में जो २ जोड़े तो ३ यह श्रेढ़ी का दूसरा पद हुआ ऐसे ही ३ में जो २ जोड़े तो ५ श्रेढ़ी का तीसरा पद हुआ ॥

२५.१९.१८.१७. इस पङ्क्ति को अन्तर श्रेढ़ी कहेंगे क्योंकि प्रत्येक दो आसन्न पदों में पहिला पद दूसरे पद से २ के समान छोटा है ॥

जो श्रेढ़ी का आदि पद अ मानो और च चय मानो तो अ.अ+च.अ+२च.अ+३च. आदि योग श्रेढ़ी हुई और अ.अ−च.अ−२च.अ−३च.आदि अन्तर श्रेढ़ी हुई ॥

पहिली योगज श्रेढ़ी में क्रम से राशि के योग करने से राशि बढ़ती चली जाती है और दूसरी अन्तर श्रेढ़ी में क्रम से च राशि के घटाने से राशि घटती चली जाती है ॥

अपने मन में तो विचारो कि १.३.५.७.८.आदि श्रेढ़ी है वा नहीं विचार पीछे तुरन्त मालूम होगा कि श्रेढ़ी नहीं है कारण यह है कि एक और ३ के बीच २ का अन्तर है या ३−१=२ और ५ और ३ के बीच २ का अन्तर है वा ५−३=२ इस लिये जो श्रेढ़ी होती तो परिभाषा के अनुसार प्रत्येक दो पास की राशियों के बीच एक ही सा अन्तर रहता ॥

अपने मन में तो विचार करो कि १.५.९.१३.१२.

आदि श्रेढ़ी है वा नहीं विचारते ही मालूम होगा कि श्रेढ़ी है कारण यह है कि ५−१=४ और ९−५ भी=४।।
और ऐसे ही १३−९=४ और १७−१३=४ आदि श्रेढ़ी की राशि क्रम से ४ के जोड़ने से बढ़ती चली जाती है ।।

(८९) अ, अ+च, अ+२च, अ+३च आदि ये गज श्रेढ़ी में अ आदि पद है, अ+च दूसरा पद है और अ+२च तीसरा पद ऐसे ही और जानो। इस से यह बात निकलती है कि जो स को श्रेढ़ी के किसी पद की संख्या मानो जैसे पहिला वा दूसरा वा तीसरा आदि तो सवें स्थान का पद अ+(स−१)च इस के तुल्य होगा कारण यह है कि जो स को १ मानो वा पहिला पद निकालना हो तो अ+(स−१)च इसमें स के स्थान में १ रक्खा तो अ पहिला पद हुआ क्योंकि
अ+(१−१)च=अ+०×च ।।
=अ+०=अ ।।
जो स को २ मानो और दूसरा पद निकालना चाहो तो अ+(स−१)च इसमें स के स्थान में २ रक्खो तो अ+च यह दूसरा पद होगा ।।
क्योंकि अ+(२−१)च=अ+१×च=अ+च ।।
जो स को ३ मानकर तीसरा पद निकाला चाहो तो अ+(स−१)च इसमें स के स्थान में ३ रखने से अ+२च तीसरा पद हुआ ।।
क्योंकि अ+(३−१)च=अ+२×च=अ×२च ऐसेही जो चौथा पांचवां आदि पद निकालने हों तो निकाल लो।

इसी रीति से अंतर श्रेढ़ी में सोवें स्थान का पद अ−(स−१)च होगा ॥

(६०) इस कारण जो श्रेढ़ी का आदि पद और चय मालूम हो तो उन से श्रेढ़ी का चाहो जिस स्थान का पद निकल सक्ता है ॥

॥ उदाहरण ॥

१.५.९.१३.१७. आदि श्रेढ़ी का पचासवां पद बतलाओ यह योग श्रेढ़ी है इस कारण अ+(स−१)च इस में स के स्थान में ५० रक्खा और अ के स्थान में १, और च के स्थान में ५−१वा ४ रक्खा तो १+(५०−१)४= १+२००−४=१९७ यही श्रेढ़ी का पचासवां पद हुआ ॥

(६१) श्रेढ़ी के पदों का जो योग करना हो अर्थात श्रेढ़ी फल लाना हो तो उन पदों का योग, योग करने की रीति से कर सक्ते हैं परन्तु जब श्रेढ़ी के बहुत से पद हों तो इस रीति से योग करने में उलझाव दिखाई देगा इस के लिये एक सुगम रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

श्रेढ़ी के आदि और अंत पद के अर्द्ध योग को श्रेढ़ी के पदों की संख्या वा गच्छ से गुण दो वा जो सुगम पड़े तो आदि और अंत पद के योग के आधे गच्छ से गुण दो यही घात हुए श्रेढ़ी फल होगा ॥

१.५.९.१३.१७ आदि इस श्रेढ़ी के पांच पदों का श्रेढ़ी फल बतलाओ ॥

१ पहिला पद और १७ अन्त पद इन का योग १८

हुआ इसका आधा ९ हुआ इसको ५ गच्छ से गुणा तो ९×५=४५ श्रेढी फल हुआ इसकी सत्यता देखने के लिये १+५+९+१३+१७ इनका योग करके देखो कि योग ४५ है या नहीं जो ४५ निकले तो श्रेढी फल ठीक जानो ॥

जो पूर्व श्रेढी के सौवें पद तक सब पदों का योग करना हो तो प्रथम सौवें पद को ढूंढा ॥

१+(१००−१)×४ = १+४००−४ = ३९७

अब इष्ट योग = ½(१+३९७)×१०० = १९९×१०० = १९९००

॥ रीति की उपपत्ति ॥

श्रेढी का आदि पद अ है और च चय है और प पिछला पद वा अंत पद है ॥ तो

अ, अ+च, अ+२च, अ+३च + आदि ... + प यह श्रेढी का स्वरूप हुआ और कल्पना करो कि श्रेढी के पदों का योग य है ॥ तो य = अ + अ+च + अ+२च + अ+३च + आदि — + य श्रेढी के पास के प्रत्येक दो पदों के बीच च अंतर समान है और योग य श्रेढी में प पिछला पद है इस लिये प−च पद इस के पूर्व होगा और प−च इस पद के पूर्व प−२च यह पद होगा ऐसे ही श्रेढी के और पद होंगे उन को उत्क्रम से लिखा ॥ तो

य = प + प−च + प−२च + आदि ... अ+च + अ

और य = अ + अ+च + अ+२च + आदि ... प−च + प इन का योग किया तो २य = अ+प + अ+प + अ+प + आदि ... अ+प + अ+प श्रेढी में जितने

* ९९ प्रक्रम ॥

पद होंगे उतने ही बार अ+प आवेगा और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो ॥ तो

२य=ग बार अ+प वा ग×(अ+प) इस कारण य=½ ग (अ+प) ऐसे ही जो अंतर श्रेढ़ी हो तोभी श्रेढ़ी फल वा य=½ ग (अ+प) ॥

केवल अंतर श्रेढ़ी में योगज श्रेढ़ी की अपेक्षा + च के स्थान में − च होगा और उत्क्रम अंतर श्रेढ़ी में −च के स्थान में + च होगा कारण यह है कि अंतर श्रेढ़ी में कोई पद जैसे प पूर्व पद से च के समान छोटा होगा वा प+च पूर्व पद होगा इस लिये अंतर श्रेढ़ी फल वा य=अ.अ−च.अ−२च.अ−३च+आदि···+प ॥

और य=प+प+च+प+२च+प+३च+आदि+अ इन दोनों फलों का योग करने से २य=अ+प+अ+प+अ+प+आदि अ+प श्रेढ़ी में जितने पद होंगे उतने ही बार अ+प आवेगा ॥

और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो तो २य=ग बार अ+प वा ग (अ+प) इस कारण य=½ ग (अ+प) ॥

(८३) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद ढूंढ़ो वा ऐसी राशि निकालो कि जब उन तीनों राशियों को क्रम से रक्खो तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अंतर हो ॥

कल्पना करो कि य ऐसी राशि है तो अ.य.क, ये श्रेढ़ी पद होंगे और जो योगज श्रेढ़ी होगी तो

य—अ च य होगा और क—य भी च य होगा॥
इस कारण य—अ=क—य
पक्षांतर नयन से २य=अ+क
२ का भाग देने से य=$\frac{अ+क}{२}$
इससे यह बात निकली कि जो योगज श्रेढ़ी वा अंतर श्रेढ़ी की दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो उन दोनों राशियों का आधा योग इष्ट मध्य पद होगा॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ६ और २० इन के बीच $\frac{१}{२}$(६+२०) वा १३ मध्य पद होगा अर्थात् ६, १३, २० ये श्रेढ़ी पद हुए अ+क और अ—क इन के बीच $\frac{१}{२}$ (अ+क+अ—क)
वा अ मध्य पद होगा अर्थात्
अ+क, अ, अ—क, ये श्रेढ़ी पद हैं॥
(८४) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद निकालो वा ऐसी दो राशि ढूंढ़ो कि जब उन चारों राशियों को क्रम से रक्खें तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अन्तर हो कल्पना करो कि य और र इष्ट राशि हैं तो अ, य, र, क ये श्रेढ़ी पद होंगे और अ और र इन के बीच का मध्य पद य=$\frac{अ+र}{२}$ ऐसे ही य और क इन के बीच का मध्य पद र=$\frac{य+क}{२}$ इन दो समीकरणों से य और र इन का मान लाओ॥

॥ ६३ प्रकरण॥

पहिले समीकरण में २ का गुणा करने से

$२य = अ + र$ परन्तु दूसरे समीकरण में

$र = \frac{य + क}{२}$

इस कारण $२य = अ + \frac{य + क}{२}$ २ से गुणा किया तो

$४य = २अ + य + क$ शोधन से

$३य = २अ + क$ ३ का भाग देने से

$$य = \frac{२अ + क}{३}$$

और $२य = अ + र$ यह जो समीकरण पूर्व लिखा है इस में पक्षान्तरनयन और य का मान रखने से
$र = २य - अ = \frac{४अ + २क}{३} - अ = \frac{अ + २क}{३}$ ॥

इसलिये $अ, \frac{२क + क}{३}, \frac{अ + २क}{३}, क$ ये श्रेढी पद हैं।

॥ आलाप ॥

$\frac{२अ + क}{३} - अ = \frac{क - अ}{३}, \frac{२क + अ}{३} - \frac{२अ + क}{३} = \frac{क - अ}{३}$ और $क - \frac{अ + २क}{३} = \frac{क - अ}{३}$, इससे यह मालूम हुआ कि $अ, \frac{२अ + क}{३}, \frac{अ + २क}{३}, क$ इन श्रेढी पदों में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समानान्तर है वा उन पदों का $\frac{क - अ}{३}$ चय है ॥

८५ प्र० अ और क इन के बीच दो मध्यपद निकालने की दूसरी सुगम रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि च चय है तो $अ, अ + च, अ + २च$

क ये श्रेढ़ी पद होंगे इस कारण इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर होगा और समान अन्तर च है॥

इस कारण च = क — (अ + २च) कोष्ठ मिटाने से

च = क — अ — २च पक्षान्तरानयन से

३च = क — अ   ३ का भाग देने से

$$च = \frac{क — अ}{३}$$

इस कारण अ + च, और अ + २च ये मध्य पद तुल्य हैं अ + $\frac{क — अ}{३}$, अ + $\frac{२क — २अ}{३}$ वा $\frac{२अ + क}{३}$ और $\frac{अ + २क}{३}$ इन के॥

इसी रीति से इष्ट दो राशियों के बीच दो से अधिक मध्य पद निकल सक्ते हैं॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{२}$ इन के बीच मध्य पद निकालो॥

मध्य पद = $\frac{१}{२}(\frac{१}{४} + \frac{१}{२}) = \frac{१}{२} \times \frac{३}{४} = \frac{३}{८}$ ॥

(२) $\frac{२}{३}$ और $\frac{११}{६}$ इन के बीच दो मध्य पद निकालो।

कल्पना करो कि य च यो है तो $\frac{२}{३}$, $\frac{२}{३}$ + य, $\frac{२}{३}$ + २य, $\frac{११}{६}$ ये श्रेढ़ी पद होंगे और इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर हैं। इस लिये

$$य = \frac{११}{६} — (\frac{२}{३} + २य)$$

कोष्ठ मिटाने से $= \frac{११}{६} - \frac{१}{३} - २य$

$= \frac{९}{६} - २य$

पक्षांतरानयनसे ३य $= \frac{५}{६}$

३ का भाग देने से य $= \frac{९}{१८} = \frac{१}{२}$

इस लिये $\frac{२}{३}$ + य $\frac{२}{३}$ + २य ये मध्य पद तुल्य हैं $\frac{२}{३} + \frac{१}{२}$ और $\frac{२}{३}$ + १, वा $\frac{७}{६}$ और १ $\frac{२}{३}$ के

इस कारण $\frac{२}{३}, \frac{५}{६}, १\frac{२}{३}, \frac{११}{६}$, ये श्रेढ़ी पद हुए॥

॥ गुणोत्तर श्रेढ़ी ॥

जब एक पंक्ति में राशि इस क्रम से स्थापित्त हों कि प्रत्येक दो पास की राशियों में भाग लेने से समान लब्धि मिलें वा पंक्ति के पहिले पद को किसी एक गुणक से क्रम से गुणा करने से शेष पद उत्पन्न हुए हों तो ऐसी पंक्ति को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहेंगे और उस गुणक को गुणोत्तर वा सम्बन्ध चाहे वह पूर्णाङ्क हो वा भिन्न जैसे १, २, ४, ८, १६, यह वर्द्धमान वा बढ़ती गुणोत्तर श्रेढ़ी है कारण यह है कि इस श्रेढ़ी में प्रत्येक पद पूर्व पद से दूना है ऐसे ही १६, ८, ४, २, १, यह क्षीयमाण वा घटती गुणोत्तर श्रेढ़ी है कारण यह है कि इस श्रेढ़ी में प्रत्येक पद पूर्व पद से आधा है पहिली वर्द्धमान श्रेढ़ी में २ गुणोत्तर है और दूसरी क्षीयमाण श्रेढ़ी में $\frac{१}{२}$ गुणोत्तर हैं॥

गुणोत्तर श्रेढ़ी की यह पहचान है कि चाहो जिन दो पास के पदों में पहिले पद का दूसरे पद में भाग दो तो लब्धि तुल्य होगी और ऐसी लब्धि को गुणोत्तर बोलते हैं और जो सब लब्धि समान न हों तो गुणोत्तर श्रेढ़ी न जानो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) १, ३, ९, २७, इस गुणोत्तर श्रेढ़ी में गुणोत्तर क्या है $\frac{३}{१}$ वा ३ यही गुणोत्तर है ॥

(२) १$\frac{१}{२}$, ३, ६, १२ आदि इस श्रेढ़ी में गुणोत्तर क्या है $\frac{६}{३}$ = २ यह गुणोत्तर है ॥

श्रेढ़ी के पहिले पद का दूसरे पद में इस लिये भाग नहीं दिया कि पहिला पद भिन्न है इस लिये सहज में बिना क्रिया बढ़ाये तीसरे पूर्ण पद में दूसरे पद का भाग देके २ गुणोत्तर निकाल लिया

(३) $\frac{१}{३}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{३}{४}$ ये गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद हैं वा नहीं और जो हैं तो गुणोत्तर बतलाओ कि क्या है ।

$\frac{१}{२} \div \frac{१}{३} = \frac{३}{२}$ और $\frac{३}{४} \div \frac{१}{२} = \frac{३}{२}$ इस लिये $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ ये गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद हैं और $\frac{३}{२}$ यह गुणोत्तर है ॥

२८७ सू० । जो गुणोत्तर श्रेढ़ी का अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर हो तो अ, अ.ग, अ.ग^{२}, आदि गुणोत्तर श्रेढ़ी होगी और इस में प्रत्येक पद पूर्व पद से ग गुना है और जो स श्रेढ़ी पद के स्थान की संख्या माने तो सब स्थान का अग$^{स-१}$ पद होगा

कारण यह है कि जो तुम स को २ मानो तो $अग^{स-१} = अग^{२-१} = अग$ यह श्रेढ़ी के दूसरे स्थान का पद है ऐसे ही जो स को ३ मानो तो $अग^{स-१} = अग^{३-१} = अग^{२}$ यह श्रेढ़ी के तीसरे स्थान का पद है। जो स को ४ मानो तो $अग^{स-१} = अग^{४-१} = अग^{३}$ यह श्रेढ़ी का चौथा पद है; ग का घात प्रकाश दूसरे पद में १ है और तीसरे पद में २ है और चौथे पद में ३ है वा पद के स्थान की संख्या से ग का घात प्रकाशक १ कम है ॥

[illegible] इस लिये जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में आदि पद और गुणोत्तर मालूम हो तो उन से श्रेढ़ी का चाहो जो पद निकाल लो क्योंकि जिस पद को निकाला चाहते हो उस के स्थान की संख्या स हो और अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर तो सवें स्थान का पद $= अग^{स-१}$ ॥

॥ उदाहरण ॥

१, ३, ९, २७, आदि गुणोत्तर श्रेढ़ी का आठवां पद निकालो तो अ आदि पद = १ और $\frac{३}{१} = ३$ गुणोत्तर और स = ८

इस लिये $अग^{स-१} = १ \times ३^{८-१} = १ \times ३^{७} = २१८७$ ॥

योग करने की रीति से गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों का योग वा श्रेढ़ी फल मिल सकता है परन्तु जो श्रेढ़ी में बहुत पद हों तो योग करने की रीति से श्रेढ़ीफल जानने में बहुत देर लगेगी और उस [illegible]

हुआ इस कारण अगले ९९ प्रक्रम में श्रेढ़ी फल लाने की सुगम रीति लिखते हैं ॥

९९ प्र० गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों के योग करने वा श्रेढ़ी फल निकालने की रीति ॥

॥ उपपत्ति ॥

कल्पना करो कि अ, क, घ, च, आदि, म, प, ग गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद हैं और ग गुणोत्तर है तो श्रेढ़ी के अ आदि पद को ग गुणोत्तर से गुणा तो अ ग दूसरा पद हुआ परन्तु श्रेढ़ी का क दूसरा पद है।

इस कारण क = अ ग

ऐसे ही घ = क ग

च = घ ग

आदि = आदि

प = म ग

योग करने से क + घ + च + आदि + प = अ ग + क ग + च ग + आदि + म ग = (अ + क + च + आदि + म) ग यह प्रथम समीकरण हुआ ॥

जो य को सब पदों का योग वा श्रेढ़ी फल मानो तो अ + क + घ + च + आदि + म + प = य ॥

पक्षान्तरानयन से

क + घ + च + आदि + म + प = य — अ और पक्षान्तरानयन से ही अ + क + घ + आदि + म = य — प ॥

और अ आदि पद है और प अन्त पद ॥

इस लिये प्रथम समीकरण का स्वरूप यह हुआ।

य — अ = (य — प) ग

$= पग - पअ$ पक्षान्तरनयन से

$यग - य = पग - अ$ ॥

अथ $य(ग-१) = पग - अ$ ॥

ग-१ इस का भाग देने से

$$य = \frac{पग - अ}{ग - १}$$ यही श्रेढ़ी फल हुआ ॥

इस लिये जो किसी और गुणोत्तर श्रेढ़ी का फल निकालना हो तो अ आदि पद य अन्त पद, और ग गुणोत्तर इन के स्थान में जो इष्ट श्रेढ़ी में राशि हैं उन को $\frac{पग - अ}{ग - १}$ इस श्रेढ़ी फल में रक्खो तो जो राशि मिले गी वही इष्ट श्रेढ़ी फल होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

१.२.४.८. आदि १०२४ इस श्रेढ़ी का श्रेढ़ी फल निकालो १ आदि पद है २ वा २ गुणोत्तर है और १०२४ अन्त पद है इस लिये $\frac{पग - अ}{ग - १}$ श्रेढ़ी फल में अ.ग और प के स्थान में क्रम से १.२. और १०२४ रक्खो तो

$$इष्ट\ श्रेढ़ी\ फल = \frac{१०२४ \times २ - १}{२ - १} = २०४७$$

इस उत्तर की सत्यता जान्ने के लिये, १.२.४.८.१६. ३२.६४.१२८.२५६.५१२.१०२४ इस श्रेढ़ी के सब पदों का योग करो और जो योग २०४७ हो तो पूर्व श्रेढ़ी फल को सत्य जानो ॥

१८० प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच मध्य पद निकालो कल्पना करो कि स मध्य पद है तो अ.स. क, ये श्रेढ़ी पद हुए और $\frac{स}{अ}$ = गुणोत्तर है और $\frac{क}{स}$ =

* ९९ प्रक्रम ॥

गुणोत्तर इस लिये $\frac{य}{अ} = \frac{क}{य}$ अय से गुणा करने से $य^2 =$ अक ॥

वर्ग मूल लिया तो $य = \sqrt{अक}$ यह मध्य पद हुआ इस्से यह बात निकलती है कि जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो दोनों राशियों के घात का वर्ग मूल इष्ट मध्य पद होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) १६ और ६४ के बीच $\sqrt{१६ \times ६४}$ वा $\sqrt{१०२४}$ वा ३२ मध्य पद है अर्थात् १६.३२.६४. ये श्रेढ़ी पद हैं ॥

$\frac{अ}{क}$ और $\frac{क}{अ}$ इन के बीच $\sqrt{\frac{अ}{क} \cdot \frac{क}{अ}}$ वा $\sqrt{१}$ वा १ मध्य पद है अर्थात् $\frac{अ}{क}$ १. $\frac{क}{अ}$. ये श्रेढ़ी पद हैं ॥

२०१ प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच दो मध्य पद निकालो ॥

कल्पना करो कि य और र मध्य पद हैं तो अ.य. र.क. ये श्रेढ़ी पद हुए और ग को गुणोत्तर मानो तो अ आदि पद को ग से गुणा। तो

अग = य दूसरा पद हुआ इसी रीति से

यग = र तीसरा पद हुआ

रग = क चौथा पद हुआ

दूसरे समीकरण को ग से गुणा तो $य ग^2 =$ रग = क और पहिले समीकरण को $ग^2$ से गुणा तो

$अ ग^3 = य ग^2$ और $य ग^2 =$ क

इस कारण $अ ग^3 =$ क

अ का भाग देने से $ग^3 = \frac{क}{अ}$

घन मूल लिया तो $ग = \sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

इसलिये $य = अग = अ\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

और $र = यग = अ\sqrt[3]{\frac{क}{अ}} \times \sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

$= अ\left(\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}\right)^2$

२०२ प्र० दो राशियों के बीच दो मध्य पदों को सहज से निकालने की रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि अ और क राशियों के बीच मध्य पद निकालना है और ग गुणोत्तर है तो अ, अग, $अग^2$, क, ये श्रेढ़ी पद होंगे ॥

और $\frac{क}{अग^2} = ग$ गुणोत्तर

ग से गुण किया तो $\frac{क}{अ} = ग^3$

घन मूल लिया तो $ग = \sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

और $अग = अ\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$ यह पहिला मध्य पद हुआ।

और $अग^2 = अ\left(\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}\right)^2$ यह दूसरा मध्य पद हुआ।

इसी रीति से जो श्रेढ़ी के आदि पद और अन्त पद मालूम हों तो उस से श्रेढ़ी के सब मध्य पद मालूम हो सकते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

$\frac{१}{३}$ और $\frac{३}{४}$ इन के बीच का मध्य पद बतलाओ। मध्य पद $= \sqrt{\frac{१}{३} \times \frac{३}{४}} = \sqrt{\frac{१}{४}} = \frac{१}{२}$

* ९६ प्रक्रम ॥

$\frac{१}{९}$ और ३ के बीच दो मध्य पद निकालो

कल्पना करो कि य गुणोत्तर है तो

$\frac{१}{९}, \frac{१}{९}य, \frac{१}{९}य^{२}, ३$ ये श्रेढ़ी पद हुए

और $३ \div \frac{१}{९}य^{२} = य$ गुणोत्तर

वा $\frac{२७}{य^{२}} = य$

$य^{२}$ से गुणा तो $२७ = य^{३}$

घन मूल लिया तो ३=य इस लिये ३ गुणोत्तर है

और $\frac{१}{९}य = \frac{१}{९} \times ३ = \frac{१}{३}$ पहिला मध्य पद हुआ

और $\frac{१}{९}य^{२} = \frac{१}{९} \times ३^{२} = १$ दूसरा मध्य पद हुआ

इस कारण $\frac{१}{९}, \frac{१}{३}, १, ३$ ये श्रेढ़ी पद हुए ॥

॥ ११ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

नीचे जो तीन श्रेढ़ी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेढ़ी का पांचवां और वीसवां पद बतलाओ ॥

(१) १, ६, ११, आदि

(२) १६, १५, १४, आदि

(३) $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, १,$ आदि

नीचे जो सात श्रेढ़ी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेढ़ी के वीसवें पद तक का श्रेढ़ी फल बताओ ॥

(४) १, ३, ५, ७, आदि

(५) ५, ८, ११, १४, आदि

(६) १००, ११०, १२०, आदि

(७) १००, ९७, ९४, आदि

(८) १५, ११, ७, आदि

(९) $\frac{३}{२}, \frac{३}{४}, १,$ आदि

(२०) १३. १२$\frac{१}{३}$. १२$\frac{२}{३}$. आदि

(२१) एक बनिये ने गल्ले में कुछ रुपये पैसे वर्ष दिन वा ३६५ दिन में इसी रीति से इकट्ठे किये कि पहिले दिन उस ने $\frac{१}{४}$ पाई के बराबर कौड़ियां गल्ले में डाली और दूसरे दिन $\frac{१}{२}$ पाई की कौड़ियां तीसरे दिन $\frac{३}{४}$ पाई की कौड़ियां और चौथे दिन एक पाई परन्तु ७वें दिन वा रविवार को नाग़ा की ऐसे ही उस बनिये ने क्रम से गल्ले में धन डाला और हर रविवार को नागा रक्खी तो बतलाओ कि उस ने ३६५ दिन में कितना धन इकट्ठा किया और जो वह इसी क्रम से धन गल्ले में डाले तो वह पचीसवें अठवारे को कितना धन गल्ले में डालेगा ॥

(२२) एक ऋणी ने अपना ऋण २५ अठवारों में इस रीति से चुकाया है कि पहिले अठवारे को उस ने अपने धनी को २ आने दिये और दूसरे अठवारे को ५ आने और तीसरे अठवारे को ८ आने इसी क्रम से उस ऋणी ने अपने धनी का सब ऋण २५ अठवारों में चुका दिया तो बतलाओ कि उस को कितना ऋण चुकाना था ॥

(२३) दिन के १२ बजे से रात्रि के १२ बजे तक १२ घण्टे बजते हैं तो बतलाओ कि इतने समय में घण्टे पर कितनी मोंगरियां पड़ी होंगी. तुम यह अच्छे रीति से जानते हो कि जब एक बजता है तो घण्टे पर केवल एक मोंगरी पड़ती है और जब दो बजते हैं तो घण्टे पर दो मोंगरी लगानी होती हैं इसी रीति

से जे घण्टे बजाने होते हैं उतनी ही मोंगरियां घ
ण्टे पर लगाते हैं ॥

(२४) २०० पत्थर की कनलों को एक सीध में दो
२ हाथ के अन्तर से रक्खा और उसी सीध में पहि
ली कनल से ६० हाथ दूर एक डलिया रक्खी फिर
एक मनुष्य डलिया के पास से चलकर पहिली
कनल के पास जो ६० हाथ दूर थी उस कनल को
उठाके लौटकर डलिया में धर गया और फिर
डलिया के पास से चलकर दूसरी कनल के पास आ
या जो पहिली कनल से २ हाथ दूर पर रक्खी थी
इसे लौट कर डलिया में रख गया इसी रीति से उस
मनुष्य ने डलिया जहां रक्खी थी वहीं रहने दी औ
र उस के पास चलकर क्रम से सब कनलों को बटो
र कर उसी डलिया में रख दी तो बतलाओ कि
उस मनुष्य को इस सारी फेरी में कितना चलना पड़ा

(२५) गुणोत्तर श्रेढ़ी के $\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$ ये दो पहिले
पद हैं तो बतलाओ कि गुणोत्तर क्या है और श्रेढ़ी
का तीसरा पद कौन सा है ॥

(२६) $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ इन के बीच गुणोत्तर श्रेढ़ी का
मध्य पद क्या होगा और उन हीं दोनों भिन्नों के बीच
अन्तर श्रेढ़ी का मध्य पद क्या होगा ॥

(२७) १ और ३ इन के बीच के २ योगान्तर श्रेढ़ी के
मध्य पद बतलाओ ॥

(२८) १०० और ८० इन के बीच के ४ अन्तर श्रेढ़ी
के मध्य पद बतलाओ ॥

(१९) ५ और ३२० इन के बीच के ५ गुणोत्तर श्रेढ़ी के मध्य पद निकालो ॥

(२०) १०० और $2\frac{24}{25}$ इन के बीच के ३ गुणोत्तर श्रेढ़ी के मध्य पद निकालो ॥

(२१) एक ऋणी ने अपना ऋण चुकाने का यह बन्धान किया कि उसने पहिले अठवारे को ५ आने दिये और दूसरे अठवारे को ८ आने दिये इसी रीति से उसने प्रत्येक अठवारे में क्रम से ३ आने की बढ़ती से ऋण चुकाया और उसने अन्त के अठवारे को १८॥|≈) आना दिये तो बतलाओ कि उसने कितना ऋण कितने अठवारों में चुकाया ॥

(२२) एक व्योपारी ने व्योपार किया तो पहले वर्ष में उसे केवल १००) नफ़ा के मिले और दूसरे वर्ष में १३०) नफ़ा के मिले तीसरे वर्ष में १६०) नफ़ा के मिले इसी क्रम से हर वर्ष में उसे ३०) नफ़ा के अधिक मिले और अन्त वर्ष में उसे ५५०) नफ़ा के मिले तो बतलाओ कि उस ने के वर्ष व्योपार किया ॥

(२३) एक जमींदार ने १० सेर गेहूं बोये और फस्ल में जो गेहूं हुए उन को अगले वर्ष में बोये और दूसरी फ़स्ल में जो गेहूं हुए वे तीसरे वर्ष में बोये फिर तीसरी फ़स्ल के गेहूंओं को चौथे साल में बोया तो चौथी फ़स्ल में २२६५ $6\frac{1}{4}$ मन गेहूं हुए और पहिली फ़स्ल में गेहूं बीज के गेहूं से जे गुने उत्पन्न हुए उतने ही गुने गेहूं हर फ़स्ल में बीज के गेहूं से उत्पन्न हुए तो

बतलाओ कि हर फ़स्ल के गेहूं बीज के गेहूं से कित ने गुने अधिक उत्पन्न हुए ॥

(२४) गति विद्या में यह लिखा है कि जो कोई पदार्थ ऊपर से नीचे को गिरे तो वह पहिले सेकण्ड वा २ $\frac{१}{२}$ विपल में क़रीब १६ $\frac{१}{१२}$ फ़ुट के गिरेगा और दूसरे सेकण्ड में १६ $\frac{१}{१२}$ + ३२ $\frac{१}{६}$ फ़ुट गिरेगा और तीसरे सेकण्ड में १६ $\frac{१}{१२}$ + ३२ $\frac{१}{६}$ + ३२ $\frac{१}{६}$ फ़ुट गिरेगा इसी क्रम से वह पदार्थ प्रत्येक सेकण्ड में ३२ $\frac{१}{६}$ फ़ुट की बढ़ती से गिरेगा और हवा में ऊपर बुर्ज चढ़ा था उस में से कुछ भारी बोझ नीचे को गिरा और वह २० सेकण्ड में धरती पर आ पहुंचा तो बतलाओ कि ऊपर जो हिसाब लिखा है उस के अनुसार बुर्ज धरती से कितना ऊंचा होगा स्मरण रक्खो कि इस गणित में हवा की रोक का कुछ परिमाण नहीं लिया है ॥

॥ मिश्र प्रश्न ॥

नीचे जो बीजात्मक राशि लिखी हैं उन का लघुतम रूप करो।

(१) (२ग-३र)य-(ग-२)य² -(ग-२र)य-य ॥

(२) (ब-क)य² -(ब+क)य+२कय³ -२य³ ॥

(३) (अ-२प)य³ +(अ+२प)य³ -(प-अ)य³ -य³ ॥

(४) बतलाओ कि $\frac{२}{अ-क}$ यह $\frac{१}{अ}-\frac{१}{क}$ इसके तुल्य है ॥

(५) बतलाओ कि $\frac{अ-क}{य}$ यह $\frac{अ}{य}-\frac{क}{य}$ इसके तुल्य है ॥

(६) जो अ=क=-ग हो तो अ, क, -ग ये तीनों राशि तुल्य

हों तो बतलाओ कि $\frac{अ^२ - २अक + ग^२}{क^२ - २कग + ग^२}$ इस का क्या मान है ॥

(७) २(अ+क) − ३(ग−घ) इस में से अ+क−४(ग−घ) इस को घटाओ ॥

(८) (अ+क)य + (क+ग)र इस में से (अ−क)य − (क−ग)र इस को घटाओ ॥

(९) $६य - \frac{२य}{क}$ इस में से $४\frac{१}{२}ग - \frac{अ}{क}$ इस को घटाओ ॥

(२०) $\frac{य+५}{४(य-२)}$ इस में से $\frac{५य-२५}{४(य-२)}$ इस को घटाओ।

(२१) $\frac{न}{न+१}$ और $\frac{न^२}{न+२}$ इन का योग करो ॥

(२२) $\frac{य}{२} + \frac{य}{३}$ इन को ६ से गुण दो ॥

(२३) १+य इस में $\frac{१}{य} + १$ इस का भाग दो ॥

(२४) $अ^४ + ४क^४$ इस में $अ^२ - २अक + २क^२$ इस का भाग दो ॥

(२५) $७य + य - ५य^२ - ३य$ इस में $१ - ३य^२$ का भाग दो।

(२६) $अ + क + \frac{अ}{क}$ इस में $अ + क + \frac{क^२}{अ}$ इस का भाग दो।

(२७) $अ - \frac{१}{२}(अ - \frac{१}{२}क)$ इस में $क - \frac{१}{३}(अ + \frac{१}{२}क)$ इस का भाग दो ॥

(२८) $य + १ + \frac{१}{य}$ इस को $य - १ + \frac{१}{य}$ इस से गुण दो।

(२९) $अ^४ - \frac{१}{अ^४}$ इस में $अ - \frac{१}{अ}$ इस का भाग दो ॥

(२०) $\frac{१}{२}य-\frac{१}{य}$ इसका वर्ग करो॥

(२१) (अय+अ^{२}+य^{२}) (य−अ) (य^{२}−अय+अ^{२}) (अ+य) इस क्रम से गुणन का घात निकालो॥

(२२) अ−क इसमें √अ−√क इसका भाग दो॥

(२३) $\frac{१}{२}\frac{२य+३र}{२य-३र}$ और $\frac{३}{२}\frac{२य-३र}{२य+३र}$ इन का योग करो॥

(२४) $\frac{य(य+१)(य+२)}{३}-\frac{य(य+१)(२य+१)}{१\times२\times३}$॥

॥ नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में अव्यक्त राशि का मान बतलाओ॥

(२५) $\frac{३०}{य+१}=\frac{२५}{य-२}$॥

(२६) $\frac{१२८}{३य-४}=\frac{२१६}{५य-६}$॥

(२७) $\frac{४२य}{य-२}=\frac{३५य}{य-३}$॥

(२८) $\frac{य^{२}-९}{३}=\frac{य+३}{४}$॥

(२९) $\frac{३}{य+१}=९-२$॥

(३०) $\frac{३}{१-३य}-\frac{४}{१-२य}=\frac{५}{५य-१}$॥

(३१) $\frac{१}{य+३}+\frac{२}{य+६}=\frac{३}{य+९}$॥

(४४) $११य + १९र = १०१$, $२९य - ३७र = ५$

(४५) $५६य + २७८ = ४७(य + र)$, $३८र + ८३२ = १७(य - र)$

(४६) $२य + ३र = २\frac{२}{३}(य + ४)$, $३(य + र) = ५(य - र)$

(४७) $५(\frac{१}{२}य - ३) = \frac{३}{५}(र + १) - \frac{१}{२}$, $\frac{१}{२}(र - ५) = ३\frac{१}{३}(२\frac{१}{५} - \frac{१}{१०}य)$

(४८) $\frac{य + २}{र + २} = \frac{१}{२}$, $\frac{य - २}{र - २} = \frac{१}{३}$

(४९) $\frac{य + २}{र + ६} = \frac{१}{२}$, $\frac{य - २}{र + ३} = \frac{२}{३}$

(५०) $\frac{य + ७}{र} = \frac{३}{२}$, $\frac{य}{र + १०} = \frac{१}{२}$

(५१) $\frac{य^२}{र} + य + यर = २३$, $य^२ = ९$

(५२) जल में १ बांस गड़ा था उस का $\frac{१}{५}$ भाग जल में धरती के नीचे गड़ा था और उस का $\frac{१}{३}$ भाग जल के भीतर था और १३ हाथ जल से ऊपर था तो बतलाओ कि बांस कितने हाथ लम्बा था ॥

(५३) दो मनुष्य साझी थे उन में पहला मनुष्य $\frac{३}{५}$ भाग का साझी था और दूसरा मनुष्य $\frac{२}{५}$ भाग का साझी था और दूसरे मनुष्य का जितना रुपया साझेमें लगा था उससे २०००) अधिक पहले मनुष्य का साझे का धन था तो बतलाओ कि साझे का सर्व धन क्या होगा ॥

(५४) एक मण्डली में सब पुरुष स्त्रियां और लड़के मिलकर ८० थे और ४ पुरुष स्त्रियों से अधिक थे और जितने पुरुष और स्त्रियां मिलकर थीं उन से २० अधिक लड़के थे तो बतलाओ कि कितने पुरुष, कितनी स्त्रियां और कितने लड़के थे ॥

(५५) एक पुरुष की अब ४० वर्ष की अवस्था है और उस के पुत्र की ८ वर्ष की अवस्था है तो अब पिता की अवस्था पुरुष की अवस्था से ५ गुनी अधिक है तो बतलाओ कि कितने वर्ष पीछे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से केवल दूनी रह जायगी ॥

(५६) दो बढ़ैयों ने मिलकर काम किया और उस को ७१-) मजदूरी के मिले और उन में १ मनुष्य ने २५ दिन काम किया और दूसरे ने २४ दिन और जो पहले मनुष्य को ४ दिन में मिला इस से ११आने

कम दूसरे मनुष्य को २ दिन में मिला तो बतलाओ कि हर मनुष्य को क्या रोज मिला होगा ॥

(५७) ७ घोड़े और ४ गाय ने मिलकर एक घास के ढेर को १० दिन में खा डाला और जो केवल २ घोड़े उसी ढेर को ४० दिन में खा जाते तो बतलाओ कि केवल १ गाय वैसे ढेर को कितने दिन में खायगी ॥

(५८) एक बुद्धिमान मनुष्य से पूछा कि कहो जो तुम्हारी, तुम्हारे पिता की और तुम्हारे दादाजी की कितनी २ अवस्था हैं उसने उत्तर दिया कि मेरी अवस्था और मेरे पिता की अवस्था मिलकर ८६ वर्ष के समान है और मेरी अवस्था और मेरे दादाजी की अवस्था ८० वर्ष के तुल्य है और मेरे पिता की अवस्था और मेरे दादाजी की अवस्था २०० वर्ष के समान है तो बतलाओ कि तीनों पुरुष की न्यारी २ कितनी अवस्था होंगी ॥

(५९) एक लड़के ने ५ आने के सङ्गतरे और मीठे मोल लिये और एक सङ्गतरा आध आने का पड़ा और एक मीठा ४ पाई को पड़ा पर उसने दामों के दाम को $\frac{१}{२}$ भाग के सङ्गतरे और आधे मीठे २ आने को बेंच दिये तो बतलाओ कि उस लड़के ने कितने सङ्गतरे मोल लिये और कितने मीठे ॥

(६०) एक मैदा वाले ने बहुत अच्छी ४ मन सूजी की मन ५।) के भाव की बनाई परन्तु जब उसने देखा कि सूजी का भारी मोल सुनकर खरीदार चौंक जाते हैं तो उस ने यह उपाय किया कि उस चोखी ४ मन सूजी में फी मन ९।) भाव का चोखा खा मिला दिया फिर इस

(६८) सन्दूक़ के तीनों खानों में १६२) रुपये रक्
थे कि हर एक ख़ाने में बराबर रखने के लिये दूसरे
र तीसरे खानों में जितने २ रुपये थे उन के आधे आ
रुपये पहले ख़ाने में से निकालकर दूसरे और ती
रे ख़ानों के रुपयों में मिला दिये फिर इस रीति से प
ले और तीसरे ख़ानों में जितने २ रुपये हो गये उन
आधे आध रुपये दूसरे ख़ाने में से निकालकर पह
और तीसरे ख़ानों के रुपयों में मिला दिये और फि
काल पहले और दूसरे ख़ानों में जितने २ रुपये हो
उन के आधे २ रुपये तीसरे ख़ाने से निकाल
पहले और दूसरे ख़ानों के रुपयों में मिला दिये तिस
पीछे तीनों ख़ानों में बराबर रुपये होगये तो बत
ओ कि पहले हर एक ख़ाने में कितने २ रुपये रक्
(६९) एक मनुष्य ने दरयाई कपड़ा कई गज़ २५
पये को ख़रीदा और दूसरे मनुष्य ने २५ ही रुपये
पहले मनुष्य की अपेक्षा १ गज़ कम दरयाई कप
मोल लिया इस लिये इस मनुष्य को १ आने गज के
ग सिवाय देने पड़े तो बतलाओ कि पहले मनुष्य
कितने गज़ कपड़ा ख़रीदा होगा ॥
(७०) २०० के ऐसे खण्ड करो कि उन खण्डों के व
का अन्तर ४०० है ॥
(७१) दो ऐसे भिन्न हैं कि उन का योग $\frac{६२}{६३}$ है और
उन का अन्तर $\frac{८}{६३}$ और उन्हीं भिन्नों के अंशों का योग
है और उन के हरों का योग १६ है तो बतलाओ कि
कौन से भिन्न हैं ॥

(७२) एक मनुष्य के पैरों में चलते २ छाले पड़ गये और जब वह बदाऊं से चला तो वह पहले दिन बड़ी मुश्किल से १ कोस चला और फिर टिक रहा और दूसरे दिन ३ कोस चलकर रह गया और तीसरे दिन ५ कोस चलकर टिक रहा इसी रीति से वह मनुष्य २ कोस की बढ़ती से चला, जब इस मनुष्य को ३ दिन बदाऊं से चले हो गये तिस पीछे एक दूसरा मनुष्य उसी राह बदाऊं से चला और वह पहले दिन १२ कोस आया दूसरे दिन १३ कोस चला इस क्रम से वह मनुष्य हर दिन १ कोस की बढ़ती से चला तो बतलाओ कि पहिले उन दोनों मनुष्यों की भेंट राह में कौन से दिन हुई और किस दिन उन दोनों की चाल बराबर हो गई और जिस के उपरान्त किस दिन पहले मनुष्य की चाल दूसरे मनुष्य की चाल से अधिक हो गई और जिस दिन वे बराबर चले उस दिन कितने कोस चले॥

(७३) एक शाला में लड़कों के ३ वर्ग वा दर्जे थे उन में जो विद्यार्थी थे, उन की संख्या में ऐसा सम्बन्ध था जो ५, ७, और ८ इन संख्याओं में है एक वर्ष पीछे उस शाला के पहिले वर्ग में जितने पहिले लड़के थे उन से चार और लड़के अधिक हो गये और दूसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दो सप्तमांश और बढ़ गये और तीसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दूने हो गये और तीनों वर्गों में सब लड़के मिलकर ९४ हो गये तो बतलाओ कि पहले तीनों वर्गों में कितने लड़के थे॥

(७४) चांदी का सजातीय गुरुत्व २० ३/२ है और तांबे का सजातीय गुरुत्व ९ है और तांबे मिले चांदी का सजातीय गुरुत्व १ २/११ है तो बतलाओ कि २४८ तांबे मिली चांदी में कितनी चांदी होगी और कितना तांबा

(७५) जो अ : क :: क : ग और जो क : ग :: ग : घ तो बतलाओ कि अ : घ :: अ³ : क³ और अ + क : क + ग :: क + ग : ग + घ ॥

(७६) जो ६य − अ : ४य − क :: ३य + क : ३य + अ तो बतलाओ कि य किस के तुल्य होगा ॥

(७७) जो अ : क :: ग : घ तो बतलाओ कि अ : अ + क :: अ + ग : अ + क + ग + घ ॥

(७८) २० के ऐसे तीन खण्ड करो कि पहिले और दूसरे खण्ड का सम्बन्ध २ : ५ इस सम्बन्ध के समान हो और दूसरे और तीसरे खण्ड का सम्बन्ध ५ : ३ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(७९) ऐसी दो संख्या कौन सी हैं कि उन का सम्बन्ध २ २/३ : २ ३/५ इस सम्बन्ध के समान हो और जो उन दोनों संख्याओं में २५ जोड़ दें तो उन का सम्बन्ध १ ३/५ : २ २/३ इस सम्बन्ध के समान हो ॥

(८०) गोल के घन फल और उस के व्यास के घन में क्रम रूपान्तर सम्बन्ध है अर्थात् एक गोल का घन फल दूसरे गोल के घन फल से यह सम्बन्ध रक्खेगा जो पहले गोल का व्यास दूसरे गोल के व्यास से रखता होगा तो जो एक गोल का ४ अंगुल का व्यास है और दूसरे गोल का ८ अंगुल का व्यास हो तो

बतलाओ कि उन दोनों गोल के घन फलों में क्या सम्ब
न्ध होगा ॥

(८२) दर्शनानुशासन विद्या में यह लिखा है कि स्व
प्रकाश पदार्थों के प्रकाश के परिमाण और उन के
अंतर वा दूरी के वर्ग में उतक्रम रूपान्तर का सम्बन्ध
रहता है अर्थात् जो कोई पदार्थ स्वप्रकाश जैसा सूर्य
अग्नि आदि से जो अधिक दूर होगा तो उस को स्वप्र
काश पदार्थ का उजाला भी पूर्वोक्त गणित से कम
दिखाई देगा. एक दीवे से ८ आंगुल के अंतर पर एक
पुस्तक धरी है तो बतलाओ कि उस पुस्तक को कितनी
दूर और हटाकर रक्खें जिस्से पुस्तक पर पहले से आ
धा उजाला पड़े ॥

(८३) यष्टि घन क्षेत्र, जैसा गोल लाठी गोल लेखनी जो
सीधी एकसी मोटी है आदि. के घन फल में. और उस
की उच्छ्रिति वा ऊंचाई और उस के आधार वा एक
छोर के वृत्त, के व्यास के वर्ग इन के घात में क्रम रूपा
न्तर का सम्बन्ध रहता है वा जो उच्छ्रिति और व्यास
का वर्ग इन का घात जै गुना घटेगा वा बढ़ेगा उतने
ही गुना घन फल भी घटेगा वा बढ़ेगा तो बतलाओ
कि जब एक यष्टि घन क्षेत्र की ऊंचाई दूसरे यष्टि घन
क्षेत्र की ऊंचाई से दूनी हो परन्तु उस का व्यास दूसरे
यष्टि घन क्षेत्र के व्यास से आधा हो तो उन दोनों य
ष्टि घन क्षेत्रों के घन फलों में क्या सम्बन्ध होगा ॥

(८४) एक बनिये ने पहले महीने में ½ भाई के स
मुमान गल्ले में कौड़ियां डालीं और दूसरे महीने में

२ पाई गल्ले में डाली और तीसरे महीने में ४ पाई गल्ले में डालीं इसी रीति से उसने चौगुनी वृद्धि से धन गल्ले में १२ महीने तक डाला तो बतलाओ कि गल्ले में १२ महीने में कितना धन इकट्ठा हुआ होगा॥

(८४) चार नगरी के मनुष्यों की संख्या इस क्रम से है कि पहिली नगरी में ५३०० मनुष्य हैं दूसरी नगरी में २९४० मनुष्य हैं तीसरी नगरी में १८७० मनुष्य हैं और चौथी नगरी में ६८० मनुष्य हैं तो बतलाओ कि जो २५० जवान पुलिस के इन नगरियों में चौकसाई के लिये भेजे जांय तो हर नगरी में उन मनुष्यों की संख्या के अनुसार कितने २ सिपाही भेजे जांयगे॥

(८५) धातु के दो गोल हैं उन में पहिले गोल का ६ अंगुल का व्यास है और दूसरे गोल का ७ अंगुल का व्यास है तो बतलाओ कि जो उन धातों के दोनों गोल को गला के एक गोल बनावें तो इस गोल का कितना व्यास होगा परन्तु यह स्मरण रक्खो कि दो गोल के घन फलों में और उन के व्यास के घनों में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जितना व्यास का घन जै गुना बढ़ जायगा वा घट जायगा उतने ही गुना घन फल भी बढ़ जायगा वा घट जायगा॥

(८६) सम्वत् १९०० में कार्तिक शुदी पड़वा को एक धनी ने गरीब ब्राह्मण को इतना प्रण किया कि वह जितने वर्ष की धनी की अवस्था थी उस संख्या के ४ गुनी पाइयों के तुल्य था और फिर दूसरे सम्वत् १९०१ में कार्तिक शुदी पड़वा को उस धनी ने उसी गरीब ब्राह्मण

को इतना धन पुण्य में दिया कि वह जितने वर्ष की अवस्था धनी की उस सम्वत में थी उस संख्या के ४ गुनी पाइयों के तुल्य था इसी रीति से उस धनी ने उसी दीन ब्राह्मण को १९०७ तक पुण्य किया और तिस पीछे मर गया तो बतलाओ कि उस धनी ने सब कितना धन पुण्य किया और जब वह मर गया तब उस की क्या अवस्था होगी और उस का जन्म कौन से सम्वत् में हुआ होगा

॥ १ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१)	य = १२, र = ५	(१९)	य = २, र = ३
(२)	य = १०, र = २	(२०)	य = ११, र = ७
(३)	य = ६, र = २	(२१)	य = $\frac{२}{४}$, र = $\frac{१}{५}$
(४)	य = ३, र = १	(२२)	य = ५, र = ४
(५)	य = १, र = २	(२३)	य = १०, र = ७
(६)	य = ७, र = १०	(२४)	य = ५, र = ३
(७)	य = ४, र = ३	(२५)	य = ६, र = १०
(८)	य = २, र = ३	(२६)	य = ३, र = १०

॥ ४ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $२५ अ^{२} य^{२}$

(२) $२५ अ^{२} म^{२} र^{२}$

(३) $४९ अ^{२} क^{२}$

(४) $अ^{४} क^{२} ग^{२}$

(५) $४९ अ^{८} क ग^{६}$

(६) $\frac{अ^{२} क^{२}}{ग^{२}}$

(७) $\frac{९ अ^{२} य^{२}}{४ क^{३} र^{२}}$

(८) $\frac{अ^{४} क^{२}}{४ ग^{२}}$

(९) $\frac{१६ अ^{४} क^{२}}{४९ म^{६} र^{६}}$

(१०) $\frac{९ य^{२} र^{४}}{४ य^{६}}$

(११) $\frac{१६}{२५ अ^{६} क^{२} ग^{६}}$

(१२) $अ^{२} + १ + २ अ$

(१३) $अ^{२} क^{२} + १ + २ अ क$

(१४) $य^{२} + ९ + ६ य$

(१५) $४ + र^{२} - ४ र$

(१६) $४ म^{२} + न^{२} - ४ म न$

(१७) $४ य^{२} + ९ र^{२} - १२ य र$

(१८) $म^{२} + \frac{न^{२}}{४} - म न$

(१९) $य^{२} + \frac{९}{४} + ३ य$

(२०) $म^{२} य^{२} + न^{२} + २ म न य$

(२१) $४ म^{२} य^{२} + न^{२} - ४ म न य$

(२२) $अ^{२} क^{२} य^{२} + ग^{२} + २ अ क ग य$

(२३) $९ य^{२} र^{२} + अ^{२} - ६ अ य र$

(२४) $\frac{१}{४} अ^{२} क^{२} + ग^{२} - अ क ग$

॥ ५ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $२ अ क$

(२) $३ य र^{२}$

(३) $९ अ क^{२} ग^{३}$

(४) $\frac{३ अ क}{२ ग}$

(५) $\frac{२ अ क}{३ य र}$

(६) $\frac{३ म य}{२ न र}$

(७) $१ - य$

(८) $२ य + १$

(९) $२ अ - क$

(१०) $३ य + २$

(११) $य + \frac{१}{२}$

(१२) $य - \frac{१}{४}$

(१३) $य^{२} - १२ य + ३६$

(१४) $य^{२} - १४ य + ४९$

(२८) य = २ वा − $\frac{२}{३}$

(२९) य = २६ वा − २०

(३०) य = ११ वा − १३

(३१) य = ३ वा − $\frac{४}{५}$

(३२) य = ४ वा − १ $\frac{३}{७}$

(३३) य = ७ वा − १ $\frac{३}{७}$

(३४) य = ५ वा १ $\frac{२}{११}$

(३५) य = ३ वा − $\frac{३}{५}$

(३६) य = ६ वा − $\frac{२५}{२६}$

(३७) य = १ वा − १ $\frac{१}{८}$

(३८) य = २ वा ४ $\frac{६}{१३}$

(३९) य = ८ वा १३ $\frac{२२}{३१}$

(४०) य = २६ वा − १ $\frac{१}{३}$

॥ ८ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं॥

(१) य = ± ४, र = ± २

(२) य = ± ८, र = ± २०

(३) य = ± १२, र = ± ३

(४) य = ८ वा − ३ $\frac{२}{३}$, र = ३ $\frac{२}{३}$ वा − ८

(८) य = ५ वा − ८ $\frac{१}{४}$, र = ३ वा − ५ $\frac{५}{६}$

(५) य = $\frac{२}{३}$ वा $\frac{१}{४}$, र = $\frac{१}{४}$ वा $\frac{२}{३}$

(९) य = २ वा − २ $\frac{३}{२३}$, र = ३ वा − ५ $\frac{६}{२३}$

(६) य = १ वा − १२, र = २ वा ११ $\frac{२}{३}$

(१०) य = ३ वा २, र = २ वा ३

(७) य = २ वा − $\frac{२}{३}$, र = ४ वा १ $\frac{३}{५}$

(११) य = २ वा ५ $\frac{१}{५}$, र = ४ वा − $\frac{४}{५}$

(१२) य = ७ वा − $\frac{७}{४३}$, र = ६ वा − $\frac{६६}{४३}$

॥ १९ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) २२ और २३
(२) ३, ४, ५
(३) ४ और १६
(४) १४ और १९६
(५) १२ और २३
(६) २० और २१
(७) ८ और १९
(८) २३
(९) $\frac{३}{२}$

(१०) २२ कोस और २३ कोस फ़ी घंटा
(११) प्रति घंटा ६ कोस
(१२) २५ और २०
(१३) ५६ और ४८
(१४) १८ कोस और १२ कोस
(१५) ४ गज और ५ गज॥

॥ २० अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $\frac{२}{५}$
(२) $\frac{१}{५य}$
(३) $\frac{अ}{क}$
(४) $\frac{अ}{२}$
(५) $\frac{अर}{२}$
(६) $\frac{१क}{२अ}$
(७) $\frac{अ म}{२य}$
(८) $\frac{य}{४र}$
(९) $\frac{अ+क}{ग}$
(१०) $\frac{२अ+य}{म}$
(११) $\frac{१+म}{२}$
(१२) $\frac{अ-क}{१}$
(१३) ५ औ:४
(१४) ८र:२य
(१५) ७अ:२क
(१६) ८र:य
(१७) २०य:५र
(१८) (न-२)य:२अ
(१९) २६:२७
(२०) ३अ २क
(२१) $अ^२-य^२=अक$
(२२) $र^२=२अप-प^२$
(२३) ९:२
(२४) ४ और ६
(२५) ३कर
(२६) २५ और २०
(२७) र=३अय
(२८) $र=\frac{५}{प}$